Bestimmung der Elastizitätsmoduln von Gips.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Theodor Reimers
aus Altona.

Göttingen 1914.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Voigt.

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1914.

Meinen Eltern gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

I. Messungen an den Lamellen aus der Hauptspaltungsebene . . 11

§ 1. Beobachtungsmaterial 11

§ 2. Primäre Biegung und sekundäre Drillung 13

§ 3. Messungen der primären Biegung und sekundären Drillung 16

§ 4. Primäre Drillung 24

II. Messungen an Würfeln 29

§ 1. Längseffekt 31

§ 2. Quereffekt 35

III. Drillung an Stäben breit parallel der zweizähligen Achse . . . 37

Schluß 43

Einleitung.

Die allgemeinsten Formeln, welche eine Bestimmung des Systems der Elastizitätsmoduln eines beliebigen Kristalls aus Messungen der Biegungen und Drillungen einer hinreichend großen Zahl von verschieden orientierten Stäbchen ermöglichen, sind bereits vor langer Zeit von Herrn W. Voigt[1]) aus den Grundgleichungen der Kristallelastizität abgeleitet und in einer langen Reihe experimenteller Untersuchungen verwertet worden. Bis jetzt bekannt sind indessen nur die vollständigen Modulsysteme von Kristallen mit mehr als einer Symmetrieebene.

Als eine für die krystallinische Struktur besonders charakteristische Erscheinung hat Herr W. Voigt das Resultat abgeleitet, daß ein Zylinder oder Stab von doppeltsymmetrischem Querschnitt, der einem Moment um eine Querachse oder einer biegenden Kraft einer Querachse parallel unterworfen wird, im allgemeinen keine reine Biegung erfährt, sondern gleichzeitig gedrillt wird. Dieser einen Nebenänderung entspricht eine zweite, nämlich eine Biegung bei Ausübung eines rein drillenden Moments. Beide Erscheinungen sind derartig mit einander verknüpft, daß, wenn für einen Stab bestimmter Orientierung die eine von ihnen verschwindet, das gleiche auch für die andere gilt; sie werden durch dieselben Elastizitätsmoduln gemessen.

Eine Verwertung dieser theoretischen Resultate hat bisher nur in der Weise stattgefunden, daß nach den aufgestellten Formeln diejenigen Orientierungen für Messungen ausgewählt wurden, für welche die bez. Nebenänderungen verschwinden. Dies geschah deshalb, weil die gewöhnlichen Methoden der Beobachtung von Biegung und Drillung jene Nebenänderungen nicht frei zustande-

1) Literatur s. W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig, Berlin 1910.

kommen lassen; bei ihnen erscheinen letztere demgemäß als störende Fehlerquellen. Nach diesen Gesichtspunkten hat Herr W. Voigt bei seinen Beobachtungen über Elastizitätsmoduln von Kristallen operiert. Eine direkte Bestätigung der theoretischen Folgerungen hat bisher nicht stattgefunden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit, die auf Anregung von Herrn Geheimrat Voigt unternommen wurde, ist die Bestimmung des Modulsystems eines monoklinen Kristalls und der Nachweis der sekundären Drillung bei primärer Biegung. Herr Voigt wies mich besonders auf Gips hin, als ein für diese Beobachtungen geeignetes Material.

Schon Savart und Angström haben die Klangfiguren kreisförmiger Gipsplatten beobachtet, doch entbehren diese Versuche noch einer exakt durchgeführten theoretischen Grundlage. Coromilas[1]) benutzte den Gips zu orientierenden aber nicht von der Theorie geleiteten Biegungsmessungen an Stäbchen, bei denen Länge und Breite in der Hauptspaltungsebene liegen. Herr Professor Paschen hat die Freundlichkeit gehabt, diese Präparate im Tübinger Institut aufsuchen zu lassen und für meine Messungen zur Verfügung zu stellen.

Von den mineralogischen Eigenschaften des Gipses sind für die hier interessierenden Fragen von Wichtigkeit nur seine Spaltungsebenen. Der Hauptblätterbruch verläuft parallel dem Klinopinakoid, also senkrecht zur Orthoachse. Der sogenannte muschelige Bruch geht parallel einem Orthopinakoid. Außerdem gibt es noch den sogenannten faserigen Bruch, der in treppenförmiger Abwechselung den beiden Pyramidenflächen parallel geht und so einen Bruch senkrecht zur Hauptspaltungsebene vortäuscht.

Auf Grund dieser Eigenschaften wurde folgendes Koordinatensystem als Hauptsystem eingeführt:

Z = zweizählige Achse
X // faseriger Bruch
Y ⊥ faseriger Bruch

und zwar wurde auf X und Y die positive Richtung so gewählt, daß der muschelige Bruch (= 65,5°) in den positiven Quadranten fällt.

Bekanntlich liegt der Elastizitätstheorie die Annahme zugrunde, daß die sechs Komponenten des inneren Druckes lineare homogene

1) L. A. Coromilas, Über die Elastizitätsverhältnisse von Gyps und Glimmer. Diss. Tübingen 1877. Siehe auch dort über die Arbeiten von Savart und Angström.

Funktionen der Deformationen sind. In den Ausdrücken dieser sechs Komponenten würden also 36 Konstanten c_{hk} nach Voigtscher Bezeichnung eingehen, deren Anzahl nach dem Vorgange von Thomson durch Anwendung der Hauptgleichungen der Thermodynamik unter der Annahme, daß die elastischen Vorgänge isotherm reversibel sind, auf 21 reduziert werden kann, indem $c_{hk} = c_{kh}$ wird. Für monokline Kristalle reduziert sich die Zahl infolge der zweizähligen Symmetrieachse auf 13, nämlich bei Anwendung des oben definierten Koordinatenkreuzes auf das Schema:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66}. \end{array}$$

Dasselbe Schema gilt für die Moduln s_{hk}, mit welchen sich die Deformationen als Funktionen der Spannungen darstellen.

Die zur Bestimmung der 13 Moduln gemachten Beobachtungen lassen sich in drei Gruppen teilen, je nach den Präparaten, an denen sie gemacht wurden.

I. Biegung und Drillung der Präparate von Coromilas gibt:

$$s_{11},\ s_{22},\ s_{16},\ s_{26},\ s_{66},\ s_{12}.$$

II. Längskontraktion und Querdilatation zweier Würfel mit einer Kante // Z, den andern verschieden gegen X und Y geneigt, gibt:

$$s_{33},\ s_{23},\ s_{13},\ s_{36}.$$

III. Drillung von Prismen, deren Länge senkrecht und deren Breite parallel zu der Z-Achse liegt, gibt:

$$s_{44} \cdot s_{55} \cdot s_{45}.$$

Was die Ausführung der elastischen Messungen im allgemeinen anbetrifft, so sei hier noch bemerkt, daß stets der Deformationsrückgang nach dem Entlasten gemessen wurde. Man darf hoffen, sich hierdurch von den Rückstandserscheinungen befreit zu haben, denn als Resultat des Studiums solcher Erscheinungen am Steinsalz spricht Herr W. Voigt[1]) als Fundamentalsatz aus: „Nachdem ein bestimmtes Gewicht unendlich lange ein Stäbchen belastet hat,

1) W. Voigt, Untersuchung der Elastizitätsverhältnisse des Steinsalzes. Diss. Königsberg 1874.

bringt weder ein kleineres noch das wiederholt aufgelegte gleiche Gewicht einen Rückstandszuwachs hervor".

Wegen der großen Spaltbarkeit des Gipses war die Auswahl für die Dimensionierung der Präparate sehr beschränkt, leider auf Kosten der Beobachtungsgenauigkeit, welche zum Teil nur sehr gering war. Ein Einfluß der Temperatur auf die Messungen wurde deshalb innerhalb der Schwankungen der Zimmertemperatur nicht beobachtet.

I. Messungen an den Lamellen aus der Hauptspaltungsebene.

§ 1. Beobachtungsmaterial.

Herr Coromilas hat seine Präparate so hergestellt, daß zunächst aus Platten von Ascherslebener Gips dünne Scheiben von 0,3—0,4 mm Dicke nach dem Hauptblätterbruch gespalten und aus diesen unter großer Sorgfalt nach Messingschablonen Lamellen von 15 mm Breite und 5—7 cm Länge herausgeschnitten wurden. Zweifellos bietet es einen großen Vorteil in dieser Weise die gute Spaltbarkeit des Gipses auszunutzen, zumal ähnliche unregelmäßige Schwankungen in der Dicke der Stäbchen, wie die bei diesem Verfahren entstehenden, sich wegen der Weichheit des Materials auch beim Schleifen nicht würden vermeiden lassen. Die große Breite wurde gewählt, um die schädliche Wirkung der seitlichen Ränder zu reduzieren.

Die Bestimmung der Orientierung der — leider nicht bezeichneten — Präparate war dadurch sehr erleichtert, daß bei allen an den Ecken oder Enden kleine Sprünge nach dem faserigen Bruch vorhanden waren. Ähnlich wie bei Coromilas wurde mittelst eines Mikroskopes mit Drehtischchen die Richtung der Längsachse des Stäbchens gegen diesen Bruch gemessen.

Die Dicken wurden mit einem Sphärometer gemessen, welches von Herrn Geheimrat W. Voigt beschrieben wurde in: „Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Beryll und Bergkristall". Festschrift zum 60-jährigen Doktorjubiläum von F. E. Neumann, Göttingen 1886. Weder mit dem Mikroskop noch durch Messung mit dem Sphärometer konnte ein Grat am Rande konstatiert werden. Coromilas gibt auch an, daß er nach dem Abschneiden der Präparate den Grat mit einem Messer vorsichtig abgestrichen hat. Diese Prozedur wurde vor jeder Dickenmessung wiederholt und der Staub mit einem Pinsel entfernt. Im übrigen wurde so verfahren, daß an vier Querschnitten je 2 mm vom Rande und in der Mitte eine Messung gemacht wurde, die in Tabelle I unter-

I. Tabelle der Dickenmessungen.

Nr. 2	Nr. 3	Nr. 5	Nr. 6
83,31 20 10 30	81,85 73 50 50	93,58 48 45 52	89,67 51 43 42
26 23 33 12	70 80 84 60	65 60 43 50	53 47 30 40
29 50 20 28	80 90 80 75	58 60 47 50	74 49 31 33
N = 0,4753	N = 0,4748	N = 0,4750	N = 0,4750
D = 0,3563	D = 0,3425	D = 0,4603	D = 0,4197
Nr. 8	**Nr. 9**	**Nr. 10**	**Nr. 12**
81,39 32 67 53	81,93 75 85 80	84,65 70 61 70	81,10 30 73 85
54 39 58 50	99 73 2,05 2,08	60 72 60 59	28 15 41 73
37 52 72 60	2,55 87 2,23 2,33	61 61 75 58	20 39 28 38
N = 0,4756	N = 0,4752	N = 0,4752	N = 0,4753
D = 0,3396	D = 0,3449	D = 0,3712	D = 0,3387
Nr. 13	**Nr. 18**	**Nr. 15**	**Nr. 16**
72,77 99 95 3,11	84,72 59 53 45	81,18 55 35 22	72,22 09 00 10
65 71 3,05 3,18	68 58 58 48	22 18 38 30	18 13 03 12
3,15 2,96 3,11 3,20	53 62 62 61	25 30 22 30	17 19 07 11
N = 0,4753	N = 0,4750	N = 0,4749	N = 0,4748
D = 0,2545	D = 0,3708	D = 0,3380	D = 0,2464
Nr. 19	**Nr. 21**	**Nr. 23**	**Nr. 25**
81,20 50 20 50	69,90 82 84 93	80,83 94 91 1,20	83,53 45 45 42
38 38 40 15	85 85 95 88	81 84 99 93	66 53 45 52
51 28 22 60	83 99 92 99	1,22 99 94 1,30	42 48 42 48
N = 0,4740	N = 0,4740	N = 0,4719	N = 0,4740
D = 0,3396	D = 0,2250	D = 0,3380	D = 0,3608
Nr. 27	**Nr. 29**	**Nr. 32**	**Nr. 31**
84,37 32 42 42	83,22 25 23 25	74,42 30 25 10	83,20 05 02 41
41 25 43 29	23 29 40 42	39 22 22 10	10 18 12 58
41 42 39 45	22 43 53 29	32 29 39 30	15 00 07 40
N = 0,4737	N = 0,4732	N = 0,4731	N = 0,4730
D = 0,3701	D = 0,3599	D = 0,2697	D = 0,3585
Nr. 33	**Nr. 36**	**Nr. 38**	**Nr. 44**
94,51 43 51 35	82,63 56 48 78	88,22 42 70 71	83,33 33 22 36
62 40 20 26	58 52 59 58	25 31 37 48	25 27 22 41
82 72 25 50	80 63 80 3,22	48 30 39 36	42 31 22 33
N = 0,4727	N = 0,4729	N = 0,4730	N = 0,4755
D = 0,4719	D = 0,3539	D = 0,4092	D = 0,3575
Nr. 49	**Nr. 51**	**Nr. 52**	**Nr. 53**
76,53 52 41 53	89,02 97 1,28 90	82,42 39 28 50	70,00 0,03 9,94 0,16
43 33 50 50	8,94 9,00 93 9,03	18 15 37 33	9,95 9,97 9,88 0,00
37 43 48 42	82 83 95 9,11	25 27 22 51	9,99 0,18 0,06 0,18
N = 0,4752	N = 0,4751	N = 0,4746	N = 0,4742
D = 0,2893	D = 0,4147	D = 0,3486	D = 0,2268
Nr. 54	**Nr. 56**	**Nr. 57**	**Nr. 59**
76,30 29 41 18	75,60 59 70 70	75,85 63 61 55	84,42 28 22 34
20 27 32 34	67 65 69 63	80 68 50 43	30 15 12 30
18 30 32 25	58 68 58 77	72 75 53 52	33 25 10 40
N = 0,4742	N = 0,4742	N = 0,4741	N = 0,4739
D = 0,2886	D = 0,2823	D = 0,2822	D = 0,3688
Nr. 60	**Nr. 63**	**Nr. 65**	**Nr. 66**
75,07 5,12 90 5,05	83,35 3,20 3,10 70	88,95 90 70 72	74,68 82 65 65
4,95 5,15 93 5,00	2,93 90 90 96	90 65 67 78	82 71 72 62
5,03 98 98 88	2,90 95 3,00 92	78 70 80 82	72 78 78 68
N = 0,4738	N = 0,4737	N = 0,4725	N = 0,4723
D = 0,2854	D = 0,3661	D = 0,4143	D = 0,2749

einander stehen. In dieser bedeutet ferner D den Mittelwert der Messungen in mm, N die Ablesung für den Nullpunkt, die am Anfang und Ende jeder Reihe gemacht wurde. Soweit sich die Präparate identifizieren ließen, und das war mit fast allen der Fall, stimmt die Nr. mit der von Coromilas überein.

§ 2. Primäre Biegung und sekundäre Drillung.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, tritt bei kristallinen Körpern im allgemeinen bei einer Biegung eine mit dieser gekoppelte Drillung auf. Eine Beobachtungsmethode, welche beide Deformationen bei Stäben auftreten lassen soll, benutzt am einfachsten eine Anordnung, in welcher das eine Ende des Stabes fest eingeklemmt wird, und das andere völlig frei bleibt [1]).

Unter diesen Bedingungen ist nach den von Herrn Voigt gegebenen Formeln, wenn bezeichnet: L die Länge des Stäbchens (X'-Richtung), B seine Breite (Y'-Richtung) und D seine Dicke (Z'-Richtung)

$$1) \qquad \operatorname{tg} \alpha_L = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|_L = \frac{6\,PL^2}{BD^3}\, s'_{11},$$

$$2) \qquad l_{L'} = \frac{-3\,PL^2}{BD^3}\, s'_{16},$$

worin P eine im Querschnitt $x = L$ parallel Z wirkende Kraft ist, ferner w die Verschiebung des Punktes mit der Koordinate x nach der Z-Richtung und demnach $\operatorname{tg} \alpha_L$ die Neigung des Querschnitts $x = L$ bedeutet. l_L ist die sekundäre Drillung, gemessen an der Stelle $x = L$.

Für diese Formeln sind folgende Grenzbedingungen als erfüllt vorausgesetzt. Der Koordinatenanfangspunkt soll unbeweglich sein, das ihm benachbarte Element der Längenachse X soll gezwungen sein, seine Richtung zu bewahren und das ihm benachbarte Volumenelement um X nicht drehbar sein.

Die Formeln sind erlangt durch Bestimmung derjenigen Deformationen eines seitlich freien und körperlichen Kräften nicht ausgesetzten Zylinders, bei dem die Deformationsgrößen und somit auch die Drucke sich längs der Zylinderachse linear ändern. Die Lösung dieses Problems erfordert eine ganz bestimmte Verteilung der äußeren Einwirkungen über die Endquerschnitte und liefert

---

1) Siehe dazu auch G. Kirchhoff, Annal. der Physik und Chemie, Band CVIII pag. 369.

für diese eine Krümmung. Durch das bloße Einklemmen des einen Endes kann natürlich diese Verteilung nicht erreicht werden, während zudem noch die Krümmung des Querschnittes in unbekannter Weise behindert wird. Wenn jedoch die Querdimensionen des Zylinders sehr klein gegen die Länge sind, ist es möglich einer andern Auffassung des Vorgangs der ungleichförmigen Deformation Raum zu geben, insofern sich dann ein Längenelement des Zylinders als ein längs der Achse gleichförmig deformierter Zylinder betrachten läßt [1]).

Hierdurch kann man ohne die angedeuteten Schwierigkeiten zu im wesentlichen denselben Endformeln für die der Beobachtung bei einfachem Einklemmen des festen Endes zugänglichen Veränderungen gelangen.

Im vorliegenden Falle ist die Dicke der Präparate zwar sehr klein im Verhältnis zur Länge, die Breite aber nicht. Dies wird einen Unterschied zwischen der Theorie und den Beobachtungen bedingen, von dem jedoch zu erwarten ist, daß er mit wachsendem Verhältnis der Länge zur Breite abnimmt und bei unendlicher Länge und endlicher Breite gleich Null wird.

s'_{11} (= Modul der Biegung bei ungehinderter sekundärer Drillung) und s'_{16} (= Modul der sekundären Drillung) sind hier gemeint in einem System, das in der oben angegebenen Weise jeweils durch die Orientierung des Präparates gegeben ist; da die Präparate jedoch alle mit der Breitseite in einer Ebene liegen, so ist die Z-Achse allen gemeinsam. Man kann also an ihnen den Verlauf von s'_{11} und s'_{16} in der Spaltungsebene XY messen, d. h. man kann sehen, wie sich die Moduln s'_{11} und s'_{16} ändern, wenn das sie definierende individuelle Koordinatensystem sich dem in der Einleitung gegebenen festen Hauptsystem gegenüber, mit dem es Nullpunkt und Z-Achse gemein hat, um die Z-Achse dreht.

Ist dabei f der Winkel (xx') und wird zur Abkürzung geschrieben $\cos f = c$ und $\sin f = s$, so gelten die Formeln:

$$3)\quad s'_{11} = s_{11}c^4 + (2s_{12} + s_{66})s^2c^2 + s_{22}s^4 + 2s_{16}c^3s + 2s_{26}cs^3\ ^2)$$

$$4)\quad s'_{16} = -2(s_{11}c^2 - s_{22}s^2)sc + (2s_{12} + s_{66})cs(c^2 - s^2) + s_{26}s^2(3c^2 - s^2) + \\ + s_{16}c^2(c^2 - 3s^2)$$

welche die Transformation der Bitensorkomponenten s_{11} und s_{16} bei einer Drehung um die Z-Achse darstellen.

---

1) l. c. pag. 667.
2) l. c. pag. 593.

Für die Beobachtungen wurde folgender Apparat benutzt, den ich Herrn Geheimrat Voigt verdanke und den Fig. 1 im Aufriß skizziert.

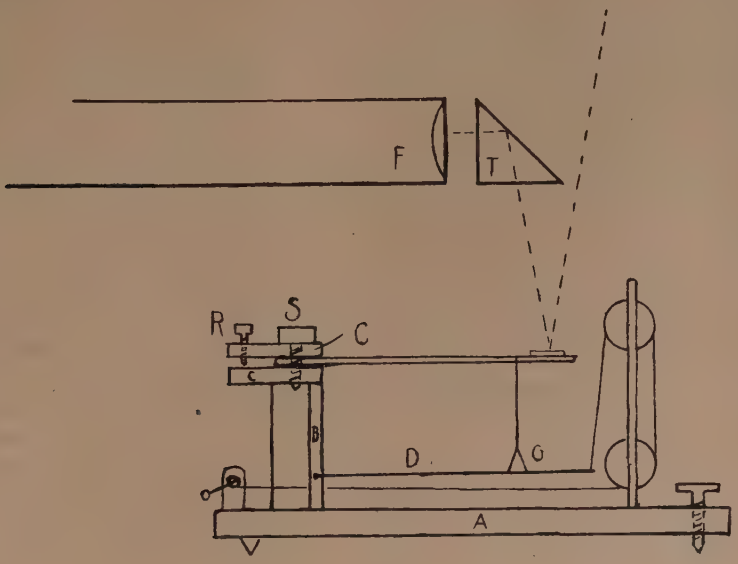


Fig. 1.

Auf der gußeisernen Grundplatte A stand eine feste Stütze B, die an ihrem oberen Ende die eigentliche Klemmvorrichtung trug. Diese bestand aus zwei Platten, welche, zwischen sich das eine Ende des Präparates fassend, mittelst zweier stählerner Schrauben S (in der Figur hintereinander) gegeneinander gepreßt werden konnten. Die Hilfsschraube R sorgte dabei für eine homogene Druckverteilung. Beim Einklemmen selber wurde das Präparat mittelst eines sogenannten „Winkels“, wie ihn die Mechaniker brauchen und der hier im besonderen noch eine Querplatte zum Anlegen hatte, mit seiner Längsrichtung senkrecht zu den Klemmbacken orientiert.

Die Belastung bestand in zwei kleinen gleichen Gewichten G, die mittelst eines Coconfadens quer über das Präparat gelegt wurden. Der Abstand des Fadens von den Klemmbacken wurde durch Auflegen eines durchsichtigen Maßstabes gemessen, dessen Teilstriche so lang waren, daß sie beiderseits über das Präparat hinausragten und so ermöglichten, den Coconfaden möglichst senkrecht zur Längsrichtung resp. parallel zu den Klemmbacken zurecht zu schieben. Die Arretierung geschah stoßfrei durch das Heben der Platte D mittelst eines Schnurlaufs und zweier Rollen, wie

aus der Figur ersichtlich sein dürfte. Am äußersten Ende des Präparates wurde ein kleiner Spiegel durch eine Drahtklammer festgehalten.

Über dem Apparat befand sich (107,6 cm entfernt) eine horizontale zweidimensionale Skala, hergestellt durch aufziehen von Koordinatenpapier auf eine Glasplatte. Hierbei war der Maßstab um 0,4 % gedehnt worden. Die Skala konnte von ihrer Rückseite aus beleuchtet werden und war durch Loten und Anlegen eines Lineals an die Klemmbacken mit ihren Koordinatenrichtungen zum Apparat justiert worden. Mit einem Fernrohr F nebst total reflektierendem Prisma T konnten auf ihr die Ausschläge der Biegung und Drillung (in den Tabellen mit Bg resp. Dr bezeichnet) gleichzeitig gemessen werden. Um die Fehler der Orientierung zu eliminieren, wurde das Präparat in zwei Lagen beobachtet, die sich durch eine Drehung um 180° um seine Längsachse unterschieden.

Die Ausschläge auf der Skala brauchen für die Biegung nicht auf den Bogen reduziert zu werden, da in der Formel gerade $\operatorname{tg} \alpha_L$ auftritt. Für die Drillungen hat die Korrektion wegen ihrer Kleinheit keine Bedeutung.

§ 3. Messungen der primären Biegung und sekundären Drillung.

Einige orientierende Messungen (Tabelle II) an möglichst verschiedenen Präparaten verschafften Sicherheit darüber, daß bei den Hauptmessungen die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wurde und sind vielleicht zugleich geeignet, einen Einblick in die Versuchsgenauigkeit zu geben.

Das Präparat wurde bei diesen Vorversuchen nur einmal eingeklemmt, die Länge L war auf dem Präparat durch einen Strich markiert, es wurde nichts geändert als die Belastung P.

Von den Fehlern, welche die beobachteten Biegungen beeinflussen, werden wohl folgende besonderen Einfluß haben.

1. Es ist unsicher, von welchem Querschnitt aus am eingeklemmten Ende die Länge zu messen ist, zumal wo eine schonende Behandlung der empfindlichen Präparate und ein festes Einklemmen im diametralen Gegensatz stehen.

2. Es ist nicht die Forderung der Theorie erfüllt, daß die Querdimensionen alle klein gegen die Länge sind.

3. Das Verfahren der Längenmessung schließt durch das Anlegen des Maßstabes einen konstanten Fehler nicht aus.

Diese Fehlerquellen lassen sich dadurch sinngemäß korrigieren, daß $y = \frac{Bg}{PL^2}$ bei verschiedenen Längen durch ungefähr gleiche Biegungen gemessen wird, und dann von diesen Messungen auf unendliche Länge extrapoliert wird. Da die Fehler von (1) und (3) konstant sind, (2) bei einiger Länge klein ist, steht zu erwarten, daß der Verlauf der Extrapolation nach $y = \alpha + \frac{\beta}{x}$ gehen wird, wenn x die variable Länge bedeutet.

II. Biegung und Belastung bei konstanter Länge.

P = 0,83	1,02	1,88	2,81	3,85	5,61	8,53
Nr. 101						
Bg = 4,94	6,04	11,22	16,82	23,00		
Bg/P = 5,96	5,94	5,97	5,99	5,98		
Dr/P = 0,74	0,72	0,72	0,75	0,78		
Nr. 102						
Bg =	1,83	3,35	5,00	6,84	9,94	15,06
Bg/P =	1,80	1,77	1,78	1,78	1,77	1,77
Dr/P =	0,15	0,14	0,13	0,13	0,13	0,12
Nr. 30						
Bg = 0,39	0,48	0,90	1,34	1,84	2,69	4,07
Bg/P = 0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48
Dr/P = 0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
Nr. 10						
Bg = 0,78	0,95	1,76	2,65	3,63	5,30	8,07
Bg/P = 0,940	0,94	0,937	0,944	0,945	0,945	0,945
Dr/P = 0,66	0,69	0,70	0,69	0,68	0,68	0,68
Nr. 54						
Bg = 2,62	3,21	5,93	8,91	12,22	17,81	27,35
Bg/P = 3,16	3,16	3,16	3,17	3,18	3,18	3,21
Dr/P = 0,0						
Nr. 49						
Bg = 4,95	6,05	11,20	16,83	23,24		
Bg/P = 5,95	5,95	5,97	5,99	6,04		
Dr/P = 0,41	0,42	0,44	0,44	0,45		
Nr. 34						
Bg = 0,91	1,11	2,06	3,07	4,22	6,14	9,33
Bg/P = 1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09
Dr/P = 0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21

III. Biegung bei verschiedener Länge.

	Bg/Dr	$\frac{Bg}{PL^2}$ beo.	$\frac{Bg}{PL^2}$ ber.
Nr. 40			
$L = 7{,}31$ $P = 0{,}832$			
5,53 5,51 5,53			
0,44 0,43 0,44	12,7	124	124
$L = 6{,}37$ $P = 1{,}018$			
5,15 5,16 5,17			
0,38 0,40 0,40	13,1	125	124
$L = 5{,}40$ $P = 1{,}878$			
6,88 6,89 6,90			
0,51 0,51 0,52	13,4	125	126
$L = 4{,}32$ $P = 2{,}811$			
6,73 6,71 6,72			
0,50 0,48 0,50	13,6	129	127
$L = 3{,}23$ $P = 3{,}848$			
5,21 5,24 5,22			
0,39 0,37 0,38	13,7	130	131
$L = 2{,}19$ $P = 5{,}609$			
resp. 8,53			
3,63 3,65 5,43			
0,25 0,26 0,39	14,0	135	137
$L = 1{,}19$ $P = 8{,}531$			
1,74 2,83 2,83			
0,12 0,20 0,20	14,3	157	152
$\alpha = 1{,}18$ $\beta = 0{,}407$			
Nr. 31			
$L = 7{,}21$ $P = 0{,}832$			
1,78 1,73 1,78			
0,54 0,51 0,55	3,31	408	410
$L = 6{,}25$ $P = 1{,}018$			
1,67 1,66 1,64 1,64			
0,51 0,49 0,49 0,50	3,33	415	415
$L = 4{,}10$ $P = 2{,}81$			
2,13 2,06 2,07			
0,59 0,58 0,57	3,60	442	436
$L = 3{,}03$ $P = 3{,}848$			
1,57 1,64 1,60			
0,41 0,44 0,42	3,80	453	457
$L = 1{,}95$ $P = 8{,}531$			
1,62 1,65 1,62			
0,37 0,39 0,37	4,35	503	501
$\alpha = 3{,}76$ $\beta = 2{,}44$			

	Bg/Dr	$\frac{Bg}{PL^2}$ beo.	$\frac{Bg}{PL^2}$ ber.
Nr. 44			
$L = 8{,}10$ $P = 1{,}018$			
resp. 1,878			
3,92 7,24			
0,18 0,35	21,2	583	592
$L = 7{,}21$ $P = 1{,}878$			
5,81 5,83			
0,25 0,26	22,8	596	596
$L = 6{,}25$ $P = 2{,}811$			
6,63 6,63			
0,27 0,27	24,6	603	601
$L = 5{,}22$ $P = 3{,}848$			
6,49 6,46			
0,24 0,23	27,5	618	610
$L = 4{,}10$ $P = 5{,}61$			
5,92 5,93			
0,16 0,16	37,0	628	624
$L = 3{,}03$ $P = 8{,}531$			
5,04 5,10 5,08			
0,07 0,07 0,07	72,6	646	647
$\alpha = 5{,}58$ $\beta = 2{,}7$			
Nr. 35			
$L = 6{,}25$ $P = 1{,}018$			
2,19 2,17 2,16			
0,41 0,41 0,40	5,35	547	550
$L = 5{,}22$ $P = 1{,}878$			
2,85 2,89			
0,52 0,53	5,47	559	559
$L = 4{,}10$ $P = 2{,}81$			
2,80 2,72 2,74			
0,50 0,50 0,50	5,51	582	575
$L = 3{,}03$ $P = 3{,}848$			
2,09 2,13 2,13			
0,38 0,37 0,38	5,63	596	601
$L = 1{,}95$ $P = 8{,}531$			
2,13 2,15 2,14			
0,35 0,36 0,36	6,02	658	655
$\alpha = 5{,}02$ $\beta = 3{,}00$			

IV. Tabelle der Messungen.

Präparat									R	$\measuredangle f$
	L	3,13	3,25	4,12	4,20	5,23	5,35	∞		
Nr. 2	*Bg*	415	415	410	405	401	400	378	17,10	0
	Dr	52,5	52,8	53,0	52,0	52,5	51,5	50,4	2,31	
	L	4,00	4,15	4,89	4,90	6,08	6,20	∞		
Nr. 3	*Bg*	479	478	468	471	464	463	432	17,31	0
	Dr	63,6	62,1	60,0	61,6	60,6	59,2	57,0	2,29	
	L	3,32	3,80	4,81	4,85	5,90	5,95	∞		
Nr. 5	*Bg*	166	161	158	157	156	155	142	13,85	16° 21′
	Dr	21,8	21,0	21,6	21,6	22,0	22,4	23,2	2,26	
	L	3,40	3,52	4,17	4,31	5,10	5,55	∞		
Nr. 6	*Bg*	202	202	202	202	200	199	196	14,48	18° 27′
	Dr	29,5	29,8	29,4	30,4	29,5	30,0	30,5	2,25	
	L	3,43	3,55	4,51	4,79	5,58	5,80	∞		
Nr. 8	*Bg*	339	338	335	334	334	334	327	12,80	28° 20′
	Dr	58,5	58,3	59,5	59,0	60,0	59,7	61,8	2,42	
	L	3,80	3,90	4,80	4,90	5,90	6,10	∞		
Nr. 9	*Bg*	341	340	333	335	333	331	316	12,95	28° 24′
	Dr	51,1	50,8	53,0	53,2	54,3	55,3	61,0	2,50	
	L	3,50	3,60	4,55	4,70	5,45	5,55	∞		
Nr. 10	*Bg*	263	259	256	257	255	253	242	12,38	28° 41′
	Dr	41,5	43,4	44,8	44,0	45,0	45,0	49,5	2,55	
	L	2,80	3,10	3,90	4,10	4,60	4,80	∞		
Nr. 12	*Bg*	320	312	306	306	306	303	282	10,95	38° 30′
	Dr	50,2	51,2	52,8	53,0	54,5	53,1	58,6	2,27	
	L	2,60	2,80	3,10	3,40	4,20	4,30	∞		
Nr. 13	*Bg*	703	701	699	694	690	688	669	11,00	39° 38′
	Dr	107	109	111	112	115	117	130	2,19	
	L	3,00	3,30	3,80	4,10	5,10	5,20	∞		
Nr. 15	*Bg*	279	276	273	273	272	272	260	10,00	45° 1′
	Dr	33,8	33,4	35,1	36,1	36,0	37,4	40,5	1,56	
	L	3,60	3,80	4,40	4,60	5,20	5,40	∞		
Nr. 16	*Bg*	681	678	677	675	673	673	659	9,84	48° 27′
	Dr	72,3	71,5	76,0	76,2	79,5	80,0	94,7	1,42	
	L	3,30	3,40	4,00	4,20	4,90	5,10	∞		
Nr. 18	*Bg*	199	198	198	197	195	195	189	9,65	49° 14′
	Dr	15,2	17,2	19,0	18,2	20,5	20,0	28,0	1,43	
	L	3,00	3,40	4,20	4,40	5,10	5,30	∞		
Nr. 19	*Bg*	268	265	262	260	258	256	241	9,45	57° 20′
	Dr						4,0		0,16	
	L	2,90	3,30	3,50	3,80	4,20	4,60	∞		
Nr. 21	*Bg*	889	884	878	878	877	864	834	9,50	58° 57′
	Dr	36	33	32	32	32	29	25	0,35	

Präparat									R	$\measuredangle f$
	L	3,50	3,80	4,50	4,80	5,80	6,00	∞		
Nr. 25	*Bg*	231	229	225	224	222	222	208	9,77	66° 6′
	Dr	33,4	33,2	34,7	34,8	35,4	35,6	39,3	1,85	
	L	3,20	3,40	4,10	4,40	4,80	5,10	∞		
Nr. 27	*Bg*	244	242	242	241	240	242	235	11,90	75° 40′
	Dr	64,6	64,3	65,5	65,8	65,5	6,80	71,5	3,64	
	L	3,20	3,80	4,40	4,60	5,50	5,75	∞		
Nr. 29	*Bg*	272	270	269	267	265	266	257	11,98	76° 27′
	Dr	72,4	74,0	74,6	75,0	74,1	76,1	78,2	3,64	
	L	4,20	4,60	5,60	5,90	6,80	7,10	∞		
Nr. 31	*Bg*	383	382	380	381	382	376	369	17,00	89° 34′
	Dr	108	109	112	112	114	113	122	5,63	
	L	3,50	3,80	4,20	4,50	5,30	5,60	∞		
Nr. 32	*Bg*	881	880	881	879	875	876	863	16,92	89° 46′
	Dr	248	253	256	257	258	262	280	5,48	
	L	3,60	3,90	4,30	4,50	5,20	5,40	∞		
Nr. 33	*Bg*	168	167	167	166	164	169	161	16,93	92° 0′
	Dr	47,0	47,0	47,2	47,5	47,0	49,0	50,8	5,35	
	L	3,80	4,20	4,60	4,80	5,80	6,10	∞		
Nr. 36	*Bg*	538	538	536	537	532	534	524	23,25	106° 47′
	Dr	92,5	93,7	92,5	95,0	94,0	95,2	99,6	4,41	
	L	4,60	4,80	5,60	5,90	6,60	6,80	∞		
Nr. 38	*Bg*	342	342	340	341	338	340	334	22,90	107° 24′
	Dr	56,0	56,8	58,0	57,6	57,5	59,0	62,2	4,27	
	L	4,30	4,40	6,00	6,40	7,30	7,40	∞		
Nr. 44	*Bg*	582	583	575	576	573	572	560	25,55	118° 44′
	Dr		38,6	38,4	39,0	39,7	39,5	42,3	1,94	
	L	4,80	5,10	6,10	6,30	7,20	7,40	∞		
Nr. 49	*Bg*	1120	1120	1110	1105	1108	1110	1105	26,75	119° 35′
	Dr	72,8	74,0	74,0	70,6	69,6	71,4	62,6	1,52	
	L	3,30	3,80	4,10	4,50	5,10	5,30	∞		
Nr. 51	*Bg*	378	375	377	373	373	372	361	25,85	128° 21′
	Dr						0		0	
	L	3,50	3,90	4,30	4,50	5,30	5,60	∞		
Nr. 52	*Bg*	651	645	642	640	638	639	619	26,25	128° 25′
	Dr						3,4		0,14	
	L	3,10	3,40	4,20	4,60	4,90	5,20	∞		
Nr. 53	*Bg*	240	239	238	237	237	235	230	26,85	128° 29′
	Dr						2,2		0,28	
	L	3,10	3,50	3,80	4,10	4,80	5,10	∞		
Nr. 54	*Bg*	117	116	116	115	115	114	110	26,45	128° 48′
	Dr						0,6		0,15	

Präparat								R	$\sphericalangle f$
	L	2,80	3,00	3,40	3,60	5,00	5,20	∞		
Nr. 56	*Bg*	1199	1192	1187	1183	1162	1160	1150	25 90	136° 7′
	Dr	68,0	63,2	62,2	63,7	68,8	67,0	75,5	2,22	
	L	3,20	3,40	3,60	3,80	4,60	4,90	∞		
Nr. 57	*Bg*	1195	1192	1190	1182	1173	1171	1135	25,55	138° 7′
	Dr	81,3	82,8	83,8	85,0	86,7	87,7	98,6	1,70	
	L	4,10	4,30	5,10	5,60	6,10	6,40	∞		
Nr. 59	*Bg*	489	485	488	485	485	485	477	23,90	149° 0′
	Dr	55,0	54,8	55,5	55,6	56,0	56,0	58,6	2,94	
	L	4,20	4,40	5,40	5,60	6,60	7,00	∞		
Nr. 65	*Bg*	287	288	285	284	282	282	273	20,40	166° 5′
	Dr	34,5	35,1	34,8	34,9	35,4	35,0	36,5	2,79	
	L	4,12	4,29	5,57	5,79	7,04	7,12	∞		
Nr. 66	*Bg*	991	985	982	985	989	984	982	19,40	166° 30′
	Dr	121	119	122	123	125	124	134	2,60	

Dies wurde bei einigen möglichst langen Präparaten besonders nachgeprüft und innerhalb der Beobachtungsfehler bestätigt gefunden (Tabelle III Seite 18).

Bei den eigentlichen Messungen wurde die Extrapolation dann graphisch so ausgeführt, daß y nicht als Funktion von x, sondern als Funktion von $\xi = \frac{1}{x}$ aufgetragen wurde. Die Extrapolation auf $\xi = 0$ resp. $L = \infty$ geschieht dann durch eine Gerade und ließ sich mit nur ganz wenigen Ausnahmen gut durchführen.

Ebenso wurde bei der sekundären Drillung verfahren.

Tabelle IV Seite 19 enthält die Beobachtungen und Extrapolationen. L bedeutet die Länge in cm, *Bg* resp. *Dr* bedeutet Biegung resp. Drillung dividiert durch PL^2, wo P die Belastung ist; ferner ist dabei *Bg* und *Dr* das Mittel aus zwei Beobachtungen in den oben erwähnten vertauschten Lagen. Unter R sind angegeben $Bg\,D^3$ resp. $Dr\,D^3$ und unter $\sphericalangle f$ die Orientierung.

Da die Präparate einer Richtungsgruppe stets sehr nahe der Richtung nach zusammenfallen, wurde von diesen das Mittel genommen. Diese Werte s'_{11} wurden als beobachtet einer Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate vermittelst Formel (3) zugrunde gelegt. Mit Hilfe der so gefundenen Werte für die Konstanten dieser Formel sind die s'_{11} und s'_{16} nach (3) und (4) wiederum berechnet worden.

Auf die Verwendung der beobachteten Werte von s'_{16} für die Ausgleichsrechnung wurde deshalb verzichtet, weil diese alle sehr

viel kleiner und damit ungenauer als die entsprechenden Werte von s'_{11} sind. Eine Zusammenstellung der beobachteten und berechneten Werte gibt folgende Tabelle [1]):

V.

Nr. der Rechnung	$\sum f$ abgerundet	s'_{11} ber.	s'_{11} beob.	s'_{16} ber.	s'_{16} beob.	
1	0	17,16	17,20	— 2,46	— 2,30	
2	17	14,39	14,17	— 2,24	— 2,25	
3	28,5	12,61	12,71	— 2,39	— 2,49	
4	39	10,91	10,98	— 2,18	— 2,23	
5	47,5	9,83	9,83	— 1,41	— 1,47	$s_{11} = 17{,}16$
6	58	9,36	9,48	+ 0,26	+ 0,24	$s_{22} = 16{,}79$
7	66	9,96	9,77	+ 1,89	+ 1,75	
8	76	11,99	11,94	+ 3,92	+ 3,64	$2s_{12} + s_{66} = 38{,}82$
9	90,3	16,79	16,95	+ 5,62	+ 5,55	
10	107	23,22	23,08	+ 4,57	+ 4,34	$s_{16} = -4{,}92$
11	119	26,04	26,15	+ 2,03	+ 1,75	$s_{26} = -11{,}24$
12	128,5	26,65	26,76	— 0,16	— 0,13	
13	137,5	25,97	25,73	— 1,92	— 1,96	
14	149	23,84	23,90	— 3,22	— 2,94	
15	166,3	19,83	19,90	— 3,14	— 2,74	

Die reduzierten Werte der Moduln sind:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 20{,}01\ (\pm 0{,}12)\,.\,10^{-10}\ \frac{cm^2}{gr} \\ s_{22} &= 19{,}58\ (\pm 0{,}11) \\ 2s_{12} + s_{66} &= 45{,}26\ (\pm 0{,}37) \\ s_{16} &= -\ 5{,}73\ (\pm 0{,}31) \\ s_{26} &= -13{,}11\ (\pm 0{,}29). \end{aligned}$$

Die Abweichungen der beobachteten und der berechneten Werte liegen innerhalb der Beobachtungsfehler; die ausnahmsweise starken Abweichungen von s'_{16} für Nr. 14 und 15 sind vielleicht dadurch zu erklären, daß gerade diese Präparate ausnahmsweise viele feine Risse haben, die sonst im allgemeinen nicht vorhanden sind.

Die Figur I (Tafel) [2]) zeigt in den Kurven den in obiger Weise

1) u. 2) Vgl. Th. Reimers, Phys. Zeitschr. 1913 pag. 276 ff. Die dort angegebenen Werte der Moduln sind wegen der beim Aufspannen bewirkten Dehnung der Skala um 0,4 % zu vergrößern. Ferner ist die hier in der Einleitung gegebene

berechneten Verlauf der Funktionen (3) und (4), doch ist für (4) der doppelte Maßstab zugrunde gelegt.

Der aus der Figur ersichtliche Zusammenhang zwischen den Extremalwerten von s'_{11} und den Nullstellen von s'_{16} ist kein zufälliger, denn man kann leicht zeigen, daß bei einer Drehung um eine feste Z-Achse ist.

$$s'_{16} = \frac{1}{2}\frac{ds'_{11}}{df}$$

Für das identische Verschwinden von s'_{16} ergibt sich somit sofort die Bedingung s'_{11} = konstant und damit $s_{11} = s_{22}$. Ferner muß im besonderen sein:

$$s_{16} = |s'_{16}|_{f=0} = 0 \qquad s_{26} = |s'_{16}|_{f=90^0} = 0.$$

Geht man hiermit in (4) ein, so erhält man noch $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$. Alle diese Bedingungen sind erfüllt, wenn die Rotationsachse eine drei- oder sechszählige Symmetrieachse ist.

Aus den Werten der Moduln berechnet sich:

$$s_{max} = 31{,}1 \,.\, 10^{-10} \frac{cm^2}{gr} \text{ bei } 127{,}8^0$$

$$s_{min} = 10{,}9 \,. \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 56{,}7^0.$$

Von hier aus läßt sich ein gewisser Vergleich mit den Untersuchungen von Herrn Coromilas anbahnen.

Von diesem wurde eine Methode benutzt, wo das Stäbchen mit beiden Enden auf Schneiden auflag und in der Mitte belastet wurde. Bei einer solchen Anordnung muß die sekundäre Drillung unbedingt als Fehler wirken; in den Richtungen der Extremalwerte jedoch, wo nach dem oben Gesagten die sekundäre Drillung verschwindet, müßten meine Messungen mit denen von Coromilas im Einklang stehen. Seine Resultate sind (es wird leider nicht angegeben, wie die Werte berechnet sind; die Theorie lag seinerzeit noch nicht vor):

$$s_{max} = 32{,}0 \,.\, 10^{-10} \frac{cm^2}{gr} \text{ bei } 134{,}4^0$$

$$s_{min} = 11{,}3 \,. \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 51{,}6^0.$$

Die Übereinstimmung mit meinen Resultaten ist leidlich, die kleine vorhandene Differenz glaube ich darauf schieben zu dürfen, daß Herr Coromilas seine Beobachtungen nicht auf unendliche

---

Festlegung des Koordinatensystems durch den faserigen und muschligen Bruch besser als die dortige durch den faserigen Bruch und eine optische Mittellinie.

Länge extrapoliert, d. h. im besonderen den Eindruck der Lagerschneiden, der bei dem weichen zum Teil welligen Material nicht unbeträchtlich sein dürfte, nicht berücksichtigt hat; er sagt in seiner Arbeit vielmehr ausdrücklich (S. 30), daß bei allen die Länge gleich war. Die Abweichungen in der Lage der Extremalwerte dürften vielleicht dadurch zu erklären sein, daß die unbekannte Hinderung der sekundären Drillung den Verlauf von s'_{11} in der Umgebung gestört hat.

§ 4. Primäre Drillung.

Die vorigen Messungen haben unter anderem die Kombination $\beta = 2s_{12} + s_{66}$ geliefert und dann gezeigt, daß in den Richtungen $s_{\max}$ und $s_{\min}$ die sekundäre Drillung verschwindet.

Der Modul s_{66} der primären Drillung für die vorliegenden Stäbchen läßt sich durch direkte Drillungsmessungen bestimmen und zwar in einfachster Weise an Präparaten der Richtung $s_{\max}$ und $s_{\min}$, denn in diesen verschwindet mit s'_{16} die sekundäre Biegung.

Da die Stäbchen einen sehr gestreckten Querschnitt haben, gilt für sie die allgemeine Formel:

$$5) \qquad n = \frac{3NL}{D^3 B} s'_{66}$$

wobei das x', y', z'-System wie früher im Stäbchen orientiert ist, und ferner n = Drillungswinkel am Endquerschnitt und N das wirkende Moment bedeutet.

Bei einer Drehung um die Z-Achse ändert sich s'_{66} nach der Gleichung:

$$6) \quad s'_{66} = 4(s_{11} + s_{22} - 2s_{12})c^2 s^2 - 4(s_{16} - s_{26})sc(c^2 - s^2) + s_{66}(c^2 - s^2)^2$$

oder wenn man $\beta = 2s_{12} + s_{66}$ einführt

$$7) \quad s'_{66} = s_{66} + 4(s_{11} + s_{22} - \beta)c^2 s^2 - 4(s_{16} - s_{26})sc(c^2 - s^2).$$

Hierin ist nach den früheren Bestimmungen s_{66} die einzige Unbekannte.

Da die Präparate außerordentlich leicht deformierbar waren, schien es geraten, für die Torsionsbeobachtungen eine Methode zu wählen, welche möglichst frei von einer störenden Reibung war, selbst auf die Gefahr hin, dadurch andere Nachteile in Kauf nehmen zu müssen.

Eine solche Einrichtung läßt sich mit Hilfe des im vorigen Paragraphen beschriebenen Apparates am einfachsten wohl so herstellen, daß das freie Ende des Stäbchens durch eine Spitze gestützt wird, um die Last eines dort anzubringenden Hebels aufzunehmen.

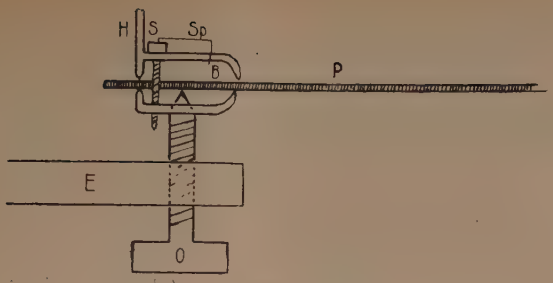


Fig. 2.

Es wurde zu diesem Zwecke eine kleine Säule mit horizontal verschiebbarem Querarm *E*, der eine Stellschraube 0 mit Spitze trug, auf der Grundplatte *A* so angebracht, daß die Spitze das wie früher eingeklemmte Präparat an seinem freien Ende und möglichst in der Mittellinie stützen konnte.

Das Drehmoment wurde mittelst eines zweiarmigen Hebels ($H = 43{,}75$ mm) aus Aluminium hervorgebracht. Die schraffierte Fläche bedeutet das Präparat *P*. Der Hebel *H* saß mit einer Schneide am Präparat auf; um ihn befestigen zu können, war an ihm seitlich, wie aus der Figur ersichtlich sein dürfte, ein ungefähr dreieckiges Stückchen Blech *B* mit einer Seite angelötet, sodaß die vom Hebel abliegende Ecke nach unten umgebogen einen dritten Stützpunkt lieferte. Auf diesem Dreieck lag der Spiegel *Sp*. Ein ähnlich gestaltetes Dreieck konnte mittelst der Schräubchen *S* von der Gegenseite des Präparates angezogen werden, sodaß die Schneiden und Spitzen einander gegenüber lagen. Das letztere Dreieck hatte außerdem noch ein möglichst großes rundes Loch, durch welches die Stützschraube mit großem Spielraum hindurch ging, um in dieser Weise den Stützpunkt möglichst nahe an die Schneiden heranzubringen.

Gegen diese Beobachtungsmethode liegen zwei Einwände auf der Hand. Erstens ist zu befürchten, daß das Präparat beim Drillen auf der Spitze seitlich fortrutscht, doch habe ich keine Erscheinung bei allen Messungen gefunden, welche in diesem Sinne gedeutet werden müßte. Zweitens findet bei dieser Anordnung die Drillung nicht um die Längsachse, sondern um eine Achse schief zu dieser statt. Da die Präparate sehr dünn sind, ist die Neigung sehr gering und ihr Einfluß läßt sich durch Extrapolation auf unendliche Länge beheben, welche wegen der unbestimmten Wirkung der Klemmbacken sowieso nötig wäre.

Bei den Messungen wurde nun in folgender Weise verfahren. Es wurde das Präparat wie bei den Biegungsmessungen einge-

klemmt und dann die Stützschraube so hoch geschraubt, daß sie das Präparat am freien Ende in der Mitte berührte. Der Beginn der Berührung konnte leicht durch ein leises Klirren festgestellt werden, das beim Beklopfen des Apparates in dieser Stellung eintrat und bis auf $^1/_4$ Umdrehung sicher war. Dann wurde der Hebel übergeschraubt und abwechselnd rechts und links belastet, sowie zwischendurch der Nullpunkt abgelesen, um Ungleichheiten des Hebels und der Unterstützung zu eliminieren.

Der Abstand des Hebels von den Klemmbacken wurde mit einem kleinen Kathetometer gemessen und um die halbe Dicke des Hebels = 0,5 mm vermehrt. In den Tabellen bedeutet jedoch L = die direkte Messung.

Vor den eigentlichen Messungen wurden noch einige Vorversuche gemacht.

Zunächst mußte festgestellt werden, ob die Stellung der Stützschraube Einfluß auf die Größe der Drillung hatte.

Zu diesem Zwecke wurde die Schraube so weit emporgeschraubt, daß sie eben berührte, und eine Drillung gemessen; alsdann wurde sie stufenweise höher geschraubt, wobei ihre Stellung durch den Längsausschlag in der Skala (1 Umdrehung $\sim$ 5 cm) zu ersehen war, und jeweils eine Messung gemacht.

	Querausschlag bei einer Belastung mit:		
Längsausschlag	1,92 gr	2,80 gr	4,27 gr
14,5	10,2 mm	14,7	22,2
13,1	10,1		
11,0	10,1		22,2
8,0	10,1		
6,0 [1])	10,1	14,7	22,2

1) Entspricht dem Beginn der Berührung. Innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit ist bei kleinen Biegungen kein Einfluß zu erkennen.

Wurde die Schraube unverändert gelassen, und die Länge L durch Verschieben des Hebels geändert, so ergab sich folgendes:

L	$\frac{Dr}{PL}$
34,6	174
37,4	174
38,2	175.

VI. Messung der Drillungen.

Nr. 51 $P = 2{,}80$

L =	49,34	49,36	49,40	. 49,4
Dr =	1,42	1,43	1,42	1,44 . 1,43
L =	44,74	44,66	44,62	. 44,7
Dr =	1,30	1,29	1,31	1,30 . 1,30
L =	41,64	41,54	41,62	. 41,6
Dr =	1,19	1,20	1,20	1,20 . 1,20
L =	41,14	41,08	41,24	. 41,2
Dr =	1,17	1,19	1,17	1,19 . 1,18
L =	38,60	38,74	38,82	. 38,7
Dr =	1,11	1,12	1,09	1,12 . 1,11
L =	29,20	29,18	29,12	. 29,2
Dr =	0,81	0,82	0,81	0,82 . 0,815

Nr. 52

$P = 1{,}92$

L =	45,56	45,60	45,68	. 45,6
Dr =	1,51	1,56	1,51	1,57 . 1,54

$P = 1{,}92$

L =	43,46	43,52	43,60	. 43,5
Dr =	1,46	1,49	1,46	1,48 . 1,47

$P = 2{,}80$

L =	37,30	37,88	37,36	. 37,4
Dr =	1,82	1,82	1,82	1,82 . 1,82

$P = 2{,}80$

L =	38,20	38,26	38,14			. 38,2
Dr =	1,86	1,89	1,86	1,90	1,85	. 1,87

$P = 2{,}80$

L =	34,68	34,64	34,44	. 34,6
Dr =	1,68	1,70	1,66	1,71 . 1,69

$P = 2{,}80$

L =	31,00	30,82	30,31	. 30,7
Dr =	1,48	1,48	1,48	1,48 . 1,48

$P = 4{,}27$

L =	24,22	24,12	24,06	. 24,1
Dr =	1,69	1,71	1,68	1,70 . 1,70

$P = 4{,}27$

L =	24,48	24,64	24,66		. 24,6
Dr =	1,74	1,72	1,75	1,76	
	1,73	1,75			. 1,74

Nr. 53

$P = 0{,}939$

L =	44,04	44,12	44,10	. 44,1
Dr =	2,70	2,71	2,73	2,71 2,72 2,71 . 2,71

$P = 0{,}939$

L =	44,76	44,68	44,60	. 44,7
Dr =	2,82	2,76	2,82	2,78 . 2,80

$P = 0{,}939$

L =	39,70	39,68	39,66	. 39,7
Dr =	2,42	2,41	2,43	2,41 . 2,42

$P = 0{,}939$

L =	38,34	38,40	38,46	. 38,4
Dr =	2,38	2,36	2,37	2,37 . 2,37

$P = 0{,}939$

L =	35,28	35,26	35,16	. 35,2
Dr =	2,15	2,19	2,15	2,20 2,14 2,20 . 2,17

$P = 0{,}939$

L =	33,56	33,50	33,46	. 33,4
Dr =	2,07	2,03	2,06	2,08 2,06
	2,04	2,06		. 2,06

$P = 0{,}939$

L =	27,68	27,54	24,44	. 27,5
Dr =	1,66	1,65	1,65	1,67 1,66 1,66 . 1,66

$P = 1{,}406$

L =	23,88	23,88	23,86	. 23,9
Dr =	2,14	2,13	2,13	2,13 . 2,13

Nr. 19 $P = 1{,}92$

L =	42,80	42,72	42,64	. 42,7
Dr =	1,86	1,85	1,86	1,84 1,85 1,84 . 1,85
L =	41,22	41,22	41,36	. 41,2
Dr =	1,79	1,80	1,79	1,80 . 1,80
L =	34,62	34,82	35,02	. 34,8
Dr =	1,48	1,49	1,48	1,49 . 1,49
L =	32,96	33,02	33,12	. 33,0
Dr =	1,40	1,39	1,39	1,39 1,39 1,39 . 1,39
L =	26,50	26,48	26,38	. 26,5
Dr =	1,06	1,06	1,07	1,06 1,07 1,06 . 1,07
L =	26,00	25,84	25,98	. 25,9
Dr =	1,06	1,04	1,06	1,04 . 1,05

Nr. 54

$P = 0{,}939$

L =	40,86	40,88	40,90	. 40,9
Dr =	1,19	1,21	1,19	1,17 1,19 1,22 . 1,20

$P = 0{,}939$

L =	39,42	39,26	39,44	. 39,4
Dr =	1,15	1,17	1,15	1,17 . 1,16

$P = 0{,}939$

L =	36,10	36,16	36,02			. 36,1
Dr =	1,04	1,06	1,03	1,06	1,03 1,06	. 1,05

$P = 1{,}406$

L =	34,82	34,70	34,78	. 34,8
Dr =	1,50	1,51	1,51	1,50 . 1,51

$P = 1{,}406$

L =	31,24	31,26	31,34	. 31,3
Dr =	1,35	1,38	1,34	1,38 . 1,36

$P = 1{,}406$

L =	30,94	30,80	30,70	. 30,8
Dr =	1,34	1,36	1,34	1,36 . 1,35

$P = 1{,}406$

L =	25,74	25,58	25,48	. 25,6
Dr =	1,08	1,10	1,08	1,10 . 1,09

$P = 1{,}406$

L =	24,88	24,88	25,16	. 24,9
Dr =	1,04	1,06	1,04	1,06 . 1,05

VII. Extrapolationen.

Nr. 51		Nr. 52		Nr. 53		Nr. 54	
$\frac{10}{L+0,5}$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$	$\frac{10}{L+0,5}$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$	$\frac{10}{L+0,5}$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$	$\frac{10}{L+0,5}$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$
0	764	0	765	0	772	0	766
2,01	732	2,17	738	2,24	754	2,41	743
2,21	734	2,27	738	2,19	762	2,50	744
2,38	727	2,64	728	2,49	743	2,73	733
2,40	721	2,58	733	2,56	756	2,83	730
2,55	722	2,85	730	2,80	756	3,14	730
3,37	699	3,21	718	2,95	756	3,19	736
		4,06	686	3,57	737	3,84	713
		3,98	688	4,10	726	3,94	707

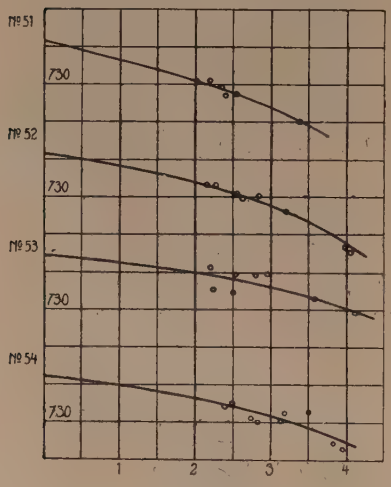


Fig. 3.

Nr.	$\sphericalangle f$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$ extrapol.
51	128° 21′	764
52	25′	765
53	29′	772
54	48′	766
Mittel	128° 31′	767

Nr. 19

$\frac{10}{L+0,5}$	$\frac{Dr\,D^3}{P(L+0,5)}$
2,31	875
2,39	880
2,84	863
2,99	847
3,71	810
3,79	813

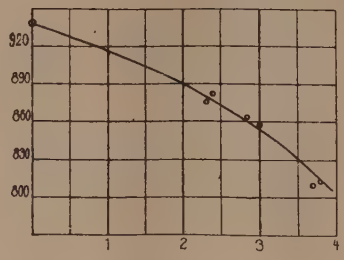


Fig. 4.

Die Abweichung ist ganz in dem Sinne und der Größenordnung, wie wenn die Änderung durch simultanes Verschieben von Hebel und Schraube gemacht wurde.

Nach diesen Vorversuchen wurden die eigentlichen Messungen gemacht, die in Tabelle VI dargestellt sind. Die unter *Dr* angegebenen Werte beziehen sich auf abwechselndes Drillen nach rechts und links. Da der Nullpunkt zwischendurch ohne Ausnahme wieder angenommen wurde, wurde die Nullpunktablesung nicht mit angegeben.

Die Extrapolation wurde graphisch ausgeführt (s. Seite 28). Der Augenschein zeigt übereinstimmend bei allen Präparaten, daß s_{66} als Funktion $\left(\frac{1}{L}\right)$ nicht linear ist, sondern eine Kurve ist, welche für abnehmende Werte von $\frac{1}{L}$ abnehmende Krümmung besitzt.

Aus den dort gefundenen Werten berechnet sich nach Formel (5) $s'_{66} = 40{,}7 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$ für $f = 128{,}5°$. Nach Formel (6) ergibt sich mit Hilfe der aus dem vorigen Paragraphen bekannten Werte der andern Moduln $s_{66} = 49{,}3 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$; $s_{12} = -2{,}0 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$.

Eine gewisse Bestätigung für die Berechtigung der Extrapolation darf man vielleicht in folgendem erblicken.

Berechnet man nämlich s'_{66} für die Richtung des Minimums (56° 44′) resp. des Präparates 19 (57° 20′) und führt man diesen Wert, nämlich 938, in die Wertetafeln für Nr. 19 ein, so sieht man, daß dieser berechnete Wert und die für die Richtung direkt beobachteten Werte wiederum zwanglos auf einer Kurve liegen, die mit den Extrapolationskurven wesentlich gleichen Charakter hat.

II. Messungen an Würfeln.

Am einfachsten wäre es gewesen, die noch fehlenden Moduln durch Biegungen und Drillungen an Stäben lang // *Z*-(Orthoachse) zu messen, wenn nicht die vorzügliche Spaltbarkeit des Gipses nach der Ebene senkrecht zu dieser Richtung die Anfertigung solcher Präparate illusorisch machte.

Infolge dieser Eigenschaft des Materials erscheint es überhaupt nur durchführbar, s_{33} (Dehnungsmodul // *Z*) durch Druckversuche zu bestimmen.

Werden auf ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel einem Koordinatensystem X', Y', Z' gehen, auf die Flächen normal zu $\pm z'$ die normalen Druckkräfte $\bar{Z}_3$ ausgeübt, so ist[1]):

$$z_z = -s'_{33}\bar{Z}_3, \quad x_x = -s'_{13}\bar{Z}_3, \quad y_y = -s'_{23}\bar{Z}_3,$$
$$x_y = -s'_{63}Z_3, \quad y_y = -s'_{43}\bar{Z}_3, \quad z_x = -s'_{53}\bar{Z}_3,$$

wobei

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \; x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \; y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \; x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \; z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

wenn u, v, w die Verschiebung eines Punktes x, y, z sind.

Für den Fall, daß die Z'-Achse mit der Z-(Orthoachse) zusammenfällt — und dies trifft für die benutzten Präparate zu — sind s'_{34} und s'_{35} identisch gleich 0 und $s'_{33} = s_{33}$.

s_{33} mißt die sogenannte Längskontraktion, s'_{13} und s'_{23} die Querdilatation und s'_{36} eine Winkeländerung, welche der Beobachtung indessen nicht ohne weiteres zugänglich ist.

Mit der Richtung ändert sich s'_{13} nach der Formel:

$$s'_{31} = s_{31}c^2 + s_{36}sc + s_{23}s^2.$$

Durch die Beobachtung an einem Parallelepiped erhält man zwei Werte für s'_{13} gegenüber den drei Konstanten der Gleichung. Es müssen demnach zur Bestimmung der Konstanten Beobachtungen an zwei verschieden orientierten Parallelepipeden gemacht werden.

Für die Beobachtung wurden zwei Würfel benutzt, die von der Firma Dr. Steeg & Reuter in Homburg aus spanischem Gips hergestellt waren, und zwar war es ihr gelungen, die Präparate fast spaltfrei zu liefern. Ein ausnahmsweise größerer Spalt (ca. 0,8 cm²), der im Würfel I vorhanden war, schloß sich nach einmaliger stärkerer Belastung für immer. Die Kantenlänge der Würfel war mit ausreichender Genauigkeit gleich 20 mm.

Bei beiden Würfeln lag ein Flächenpaar in der Spaltungsebene, bei I lagen die beiden andern parallel und senkrecht zum faserigen Bruch, bei II parallel und senkrecht zu einer Richtung, 45° gegen den faserigen Bruch.

Für die Beobachtung konnte eine Druckvorrichtung benutzt werden, die von irgendwelchen früheren Versuchen her im Institut vorhanden war.

1) l. c. pag. 569.

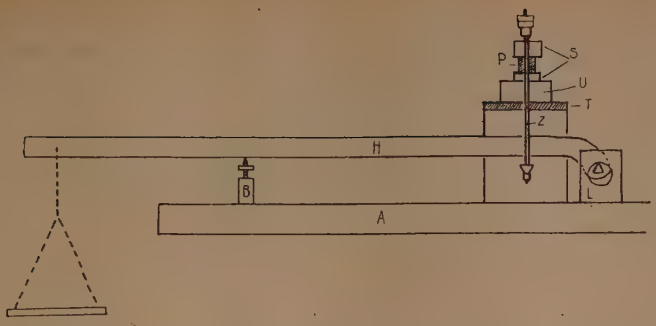


Fig. 5.

Zum Drücken diente ein kräftiger einarmiger Hebel H (Übersetzung 1 : 11,05), von dem ein Ende in einem Widerlager L ruhte.

Das Präparat P ruhte zwischen zwei eben geschliffenen Stahlplatten S auf einem Klotz U und dem eisernen Tischchen T.

Die Kraft wurde vom Hebel auf die obere Stahlplatte übertragen mittelst zweier Zugstangen Z, die lang genug waren, um keine störende Schubspannung zu erzeugen, dabei unten und oben durch eine stählerne Brücke verbunden und durch Schrauben in passende Lage gestellt waren. Eine Schraube mit Spitze B konnte zum Arretieren und eine Schale zum Aufsetzen der Belastung dienen.

§ 1. Längseffekt.

Die Längenänderung wurde auf optischem Wege mit Newtonschen Ringen gemessen.

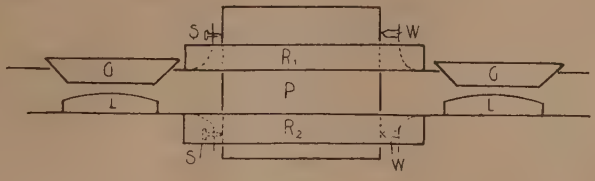


Fig. 6.

Hierzu diente folgende Vorrichtung. Mit Hilfe der Schräubchen S und des in zwei Punkten aufliegenden elastischen Widerlagers W wurden zwei Rähmchen R an dem Präparat befestigt, die eine auf der Rückseite geschwärzte Linse L resp. eine am Rande konisch geschliffene Glasplatte G trugen. Die Linsen waren fest aufgekittet, die Glasplatten hingen jedoch durch entsprechende Ausschnitte des oberen Rahmens weit hindurch.

Die Montierung geschah in folgender Weise.

Es wurde das untere Rähmchen am Würfel festgeklemmt. Dann wurden auf beide Linsen genügend große Stücke dicken Kartons gelegt, hierauf wiederum das obere Rähmchen zunächst frei aufgelegt, und in dieser Lage festgeschraubt. Anstelle des Kartons wurde nunmehr ein Stück Konzeptpapier geschoben und die Glasplatten in die Ausschnitte des oberen Rahmens gelegt und mit einem kleinen Messingklotz (20 g) beschwert. Mit drei Tropfen Klebwachs wurden die Platten in dieser Lage befestigt. Dann wurden Gewicht und Papier entfernt und in den allermeisten Fällen waren Linsen und Platten so fast automatisch hinreichend justiert. Als Lichtquelle diente eine Quecksilberbogenlampe mit Farbenfilter für die grüne Linie. Die Ringdurchmesser wurden senkrecht von oben mit einem meßbar verschiebbaren Mikroskop gemessen. Zum Messen wurde die Änderung des Durchmessers eines Ringes benutzt.

Besondere Schwierigkeit bot es, eine homogene Druckverteilung für die Auflagefläche zu erhalten. Es wurde deshalb eine Reihe von Vorversuchen mit Steinsalz gemacht, dessen Elastizitätsmoduln durch die Untersuchungen von Herrn W. Voigt hinreichend bekannt sind.

In Voigt's Kristallphysik ist für Steinsalz angegeben (pag. 741):

$$s_{11} = 23{,}82 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$$

$$s_{12} = -5{,}17 \cdot \quad „$$

Die Würfel waren aus mir von Herrn Geheimrat Voigt zur Verfügung gestelltem Material selbst gefertigt worden; es wurde darauf verzichtet, die Flächen eben schleifen zu lassen, um die Fehler um so deutlicher hervortreten zu lassen.

Es ist klar, daß die Unterlage für die zu drückenden Flächen weder zu hart noch zu weich sein darf. Im ersteren Falle, der dadurch realisiert wurde, daß das Präparat direkt zwischen die Stahlplatten gelegt wurde, liegt das Präparat im wesentlichen nur in der Mitte auf, während am Rande direkt fast überhaupt kein Druck wirkt. Der Modul erscheint also wesentlich zu klein.

Im zweiten Falle, der dadurch realisiert wurde, daß weiches Gummi als Unterlage diente, drückt sich das Präparat tief in die Unterlage ein und nach der idealen Theorie treten am Rande sogar unendliche Drucke auf. Der Modul erscheint wesentlich zu groß.

Überdies weicht eine so weiche Unterlage bei starkem Druck leicht seitlich aus, was zur Vernichtung des Präparats führt.

Schließlich bewährte sich folgende Anordnung.

VIII. Längseffekt.

Nr. 1. Steinsalz.

$Q = 423\,\text{mm}^2$; $L = 14{,}6\,\text{mm}$.

P		2	3,3	5	6,6	7,9	9,6	
u	l.	23	47	84	114	143	171	
	r.	19	29	50	79	94	131	$\Delta = 1{,}24$ $s_{11} = 23{,}4 \cdot 10^{-10}$.

Nr. 2. Gips I a.

$Q = 402\,\text{mm}^2$; $L = 15{,}0,\ 14{,}8,\ 14{,}9 \cdot 14{,}9\,\text{mm}$.

P		2	3,3	5	
u	l.	1,04	1,86	3,12	
	r.	0,41	0,72	1,37	$\Delta = 0{,}85$ $s_{33} = 66{,}0 \cdot 10^{-10}$.

Nr. 3. Gips II a.

$Q = 402\,\text{mm}^2$; $L = 14{,}8,\ 15{,}1,\ 15{,}0 \cdot 1{,}50\,\text{mm}$.

P		2	3,3	5	
u	l.	0,84	1,66	2,95	
	r.	0,52	1,05	1,58	$\Delta = 0{,}81$ $s_{33} = 65{,}4 \cdot 10^{-10}$.

Nr. 4. Gips I b.

$Q = 402\,\text{mm}^2$; $L = 14{,}5,\ 14{,}8,\ 14{,}5 \cdot 14{,}6\,\text{mm}$.

P		2	3,3	5	7,9	
u	l.	0,69	1,44	2,35	4,09	
	r.	0,48	0,92	1,77	3,04	$\Delta = 1{,}02$ $s_{33} = 63{,}7 \cdot 10^{-10}$.

Nr. 5. Gips II b.

$Q = 402\,\text{mm}^2$; $L = 14{,}7,\ 14{,}9,\ 14{,}7 \cdot 14{,}8\,\text{mm}$.

P		2	3,3	4,6	5,1	5,6
u	l.	0,90	1,73	2,59	3,05	3,11
	r.	0,60	1,16	1,68	2,00	2,09

$\Delta = 0{,}58$ $s_{33} = 63{,}5 \cdot 10^{-10}$.

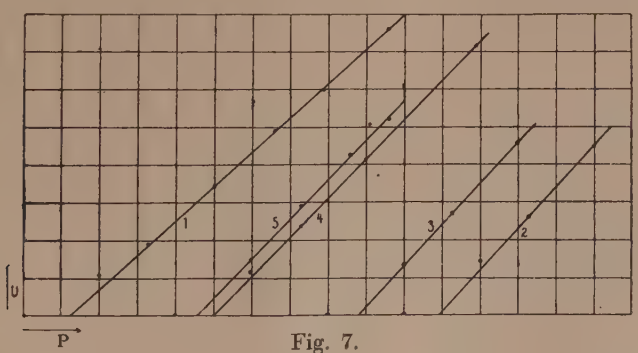


Fig. 7.

Es wurde auf die Stahlplatte eine 3 mm dicke Schicht eines sehr harten Radiergummi gelegt und hierauf eine weiche 0,75 mm dicke Kupferplatte und hierauf ein Stück Karton. Letzteres sollte lediglich zur Kontrolle dafür dienen, daß die Ränder nicht in die Unterlage eingedrückt wurden.

Der Erfolg der Anordnung ist wohl einigermaßen plausibel. Das Gummi zwischen Kupfer und Stahl bewirkt eine fast hydrostatische Druckverteilung; während zugleich die Kupferplatte dünn genug ist, um sich der Präparatoberfläche anzuschmiegen und dick genug, um das Auftreten eines Eindruckes am Rande, d. h. eines am Rande zu großen Druckes, zu verhindern.

Die mit dieser Anordnung gemachten Messungen zeigt Tabelle VIII. In dieser bedeutet L = Länge in mm, Q = Querschnitt in mm^2, P = Belastung in kg, u die links und rechts gemessene Längenänderung dividiert durch den Krümmungsradius der Linse in willkürlichen Einheiten. Die Mittelwerte dieser Messungen sind in einem Koordinatensystem eingetragen und durch eine Gerade interpoliert, der Abstand des Schnittpunktes dieser Geraden mit der Abszissenachse vom Nullpunkt ist mit Δ bezeichnet.

Die allen Beobachtungen gemeinsame Erscheinung, daß für kleine Drucke die Deformationen verhältnismäßig zu klein sind, mag dadurch erklärt werden, daß eben ein gewisser Anfangsdruck dazu gehört, um die Anschmiegung der Kupferplatte an das Präparat zu bewirken.

Dieser Anfangsdruck überwiegt also offenbar noch die Wirkung der Spalten, welche vor Ausführung der Versuche zu große Anfangsdeformationen erwarten ließen.

Was die Resultate der Messung anbetrifft, so stimmt der für Steinsalz gefundene Modul gut mit dem oben angegebenen Werte überein.

Die Werte des Moduls s_{33} für Gips stimmen unter sich genügend überein. Der Mittelwert ist:

$$s_{33} = 64{,}7\ (\pm 0{,}5) \cdot 10^{-10}\ \frac{cm^2}{gr}.$$

Leider läßt sich die Genauigkeit nicht durch Verwendung größerer Belastungen vergrößern, denn der Gips beginnt schon bei verhältnismäßig geringen Beanspruchungen sich plastisch zu verhalten. (Dies zeigten insbesondere die Drillungsversuche im nächsten Paragraphen).

Bei der Messung Nr. 4 wurde einmal versuchsweise bis 7,9 kg belastet, hierbei zeigte der Würfel nach dem Entlasten eine nicht unbeträchtliche seitliche Verschiebung. Es wurden bei den andern Messungen so hohe Belastungen nicht wieder benutzt, um die kostbaren Präparate nicht unnötig zu gefährden.

§ 2. Quereffekt.

Bei der Messung des Quereffekts wurde derselbe Druckapparat und dieselbe Unterlage wie beim Längseffekt benutzt.

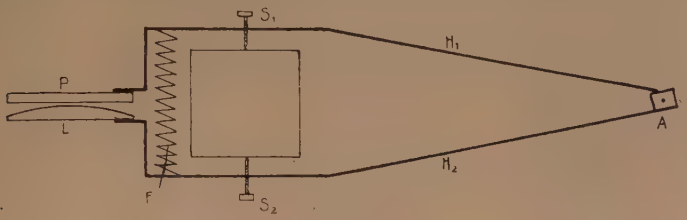


Fig. 8.

IX. Quereffekt.

Steinsalz. $Q = 423$ mm² $L = 20{,}4$

2 kg	$d = 0{,}70$	0,61	0,88	0,82	1,01		
		26	25	23			$u = 0{,}061$
3,3 kg	$d = 1{,}31$	1,14	1,37	1,25	1,44		
		50	45	42			$u = 0{,}111$
5 kg	$d = 1{,}18$	0,93	1,36	1,14	1,47		
		75	76	71			$u = 0{,}185$

Gips. Bei allen Präparaten: $Q = 400$ mm² $L = 20{,}0$ mm

Ia. 2 kg	$d = 1{,}02$	0,71	1,07	0,75	1,20	0,85	1,23			
		60	62	74	80	76				$u = 0{,}175$
3,3 kg	$d = 1{,}47$	0,99	1,52	1,06	1,61	1,23	1,08			
		125	124	131	126	119				$u = 0{,}313$
5 kg	$d = 1{,}58$	0,79	1,57	0,93	1,62	0,99	1,74			
		186	172	169	171	185				$u = 0{,}443$
Ib. 2 kg	$d = 0{,}88$	0,74	1,02	0,89	1,17	1,03	1,22			
		37	37	42	44	37				$u = 0{,}099$
3,3 kg	$d = 1{,}07$	0,87	1,18	0,98	1,31	1,09	1,41			
		51	53	60	64	66				$u = 0{,}147$
5 kg	$d = 1{,}41$	0,95	1,36	1,03	1,34	0,88	1,31			
		102	87	97	87	97				$u = 0{,}235$
IIa. 2 kg	$d = 1{,}11$	0,94	1,29	1,08	1,38	1,18	1,48			
		57	63	61	62	66				$u = 0{,}155$
3,3 kg	$d = 1{,}34$	0,77	1,42	1,03	1,47	1,23	0,67	1,35		
		132	119	103			132			$u = 0{,}303$
5 kg	$d = 1{,}45$	0,53	1,51	1,41	0,53	1,54	1,65	0,80	1,57	
		191			190			195		
										$u = 0{,}480$
IIb. 2 kg	$d = 0{,}85$	0,72	0,93	0,86	1,05	0,96	1,17			
		28	24	25	27	32				$u = 0{,}068$
3,3 kg	$d = 1{,}16$	0,86	1,12	1,00	1,28	0,97	0,77	1,01		
		56	38	45			39			$u = 0{,}111$
5 kg	$d = 1{,}23$	0,94	1,23	0,94	1,26	0,97	1,29			
		63	63	67	67	68				$u = 0{,}164$

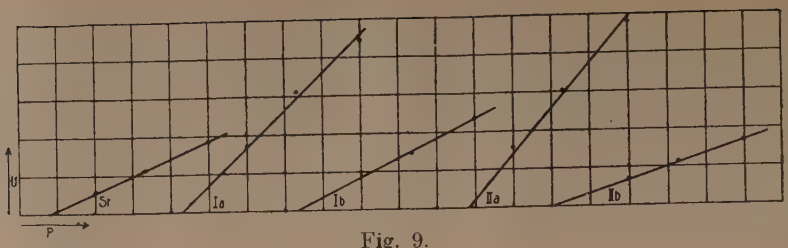


Fig. 9.

$R = 49{,}2 \quad 47{,}6 \quad 46{,}3 \quad 47{,}0 \; : = 47{,}5$ cm

Steinsalz: $s_{12} = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$.

			beob.	ber.
Gips:	Ia	0°	10,1	10,2
	IIb	45°	3,5	3,4
	Ib	90°	5,3	5,4
	IIa	135°	12,2	12,2

$$s_{13} = -10{,}2 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$$
$$s_{23} = -5{,}4 \cdot$$
$$s_{36} = 8{,}8 \cdot$$

Für Messung der Längenänderung wurde folgende Einrichtung gebraucht, welche die Figur normal zur Druckrichtung im Grundriß zeigt.

Zwei Hebel H_1 und H_2 (Übersetzung 0,55) sind durch eine in Spitzen gelagerte Achse bei A und durch eine zusammenziehende Feder F verbunden. Die Schräubchen S_1 und S_2 werden gegen das Präparat gedrückt (Übersetzung 0,55). Die planparallele Platte P und die Linse L erlauben, falls die Schrauben S hinreichend weit eingeschraubt sind, Änderungen des Abstandes der Schraubenspitzen durch Änderung von Newtonschen Ringen zu erkennen.

Leider waren die Newtonschen Ringe meistens nicht ganz ruhig im Gesichtsfeld, sondern vergrößerten oder verkleinerten sich langsam mit der Zeit.

Dies mag zum Teil ein Einfluß der Temperatur sein, zum Teil durch die infolge der Federn F bewirkte Materialspannung verursacht sein.

Diese Störung wurde dadurch zu beseitigen versucht, daß möglichst schnell hintereinander eine Reihe von Ablesungen eines Ringdurchmessers für Belastung und Entlastung gemacht wurde. Diese sind in den Tabellen als d angegeben. Aus ihnen wurde

$$e^2 = \frac{1}{4}\left[d_n^2 - \frac{1}{2}(d_{n-1}^2 + d_{n+1}^2)\right]$$

berechnet, denn wenn man schon eine Annahme über die Änderung mit der Zeit machen will, so liegt es natürlich nahe anzunehmen, daß sich der Abstand von Platte und Linse gleichförmig ändert. Wegen der geringen Beobachtungsgenauigkeit macht es übrigens nicht viel aus, ob man e aus (d^2) oder aus $(d)^2$ berechnet.

$4u$ ist der Mittelwert für die einzelnen Werte e^2.

Der Linsenradius wurde durch einige besondere Messungen bestimmt, deren Resultat in der Tabelle unter R angegeben ist.

Auch hier wurden zunächst wieder Vorversuche mit Steinsalz gemacht, die mit den früher erhaltenen Werten genügend übereinstimmen. Die Werte für Gips wurden nach der Formel für s'_{13} auf S. 30 ausgeglichen.

III. Drillung von Stäbchen breit parallel der Orthoachse.

Die nach den vorstehenden Messungen noch fehlenden Moduln s_{44}, s_{45}, s_{55} sind nur durch Drillung zu bestimmen, und zwar an solchen Präparaten, bei denen entweder die Längs- oder die Querdimension $\parallel Z$ ist.

Da es infolge der guten Spaltbarkeit $\parallel XY$ nicht wohl möglich scheint, Stäbe $\parallel Z$ herzustellen, wurden solche Stäbe benutzt, deren Breite in die Z-Richtung fiel. Die Längsrichtung wäre wieder mit X' zu bezeichnen, die Dicke mit Y'.

Die Grundlage der Drillungsbeobachtungen rechtwinkliger Prismen bildet die von Herrn W. Voigt entwickelte Formel:

$$u = \frac{3NL\left[s_{55} + \left(\frac{D}{B}\right)^2 \frac{s_{16}^2}{s_{11}} + \left(\left(\frac{D}{B}\right)^3 \frac{s_{16}^2}{s_{11}} + \frac{D}{B}\frac{s_{15}^2}{s_{11}}\right) \cdot f\right]}{D^3 B \left(1 + \frac{D}{B} f\right)}$$ [1]).

Diese allgemeine Formel vereinfacht sich hier insofern $s_{15} = 0$.

Hierin bedeutet D = Dicke, B = Breite, N = Moment um Längsachse, L = Länge; n = beobachteter Drillungswinkel.

Außerdem tritt noch die Größe f auf, welche eine unbekannte Funktion von $\frac{D}{B}$ und der Orientierung ist; sie würde eine Bestimmung von s_{55} aus der Gleichung illusorisch machen, wenn nicht verschiedene Gründe dafür sprechen, daß f für eine vorgegebene Richtung bei einigermaßen gestreckten Querschnitten eine Konstante ist.

---

1) Ann. d. Physik und Chemie. 1886, Band XXIX, pag. 604.

Schon Saint Venant zeigte, daß dies bei allen isotropen Körpern erfüllt ist ($f = -0{,}630$) und W. Voigt zeigte, daß dies bei kristallinischen Zylindern in allen Fällen, wo die Theorie durchführbar ist (stets dann, wenn die Längsachse mit einer zweizähligen Symmetrieachse zusammenfällt), auch erfüllt ist.

Es würde also obige Formel unter der Annahme f = konst. für eine Orientierung eine Bestimmung von s_{55} ermöglichen, wenn Messungen an mehreren Stäbchen mit verschiedenem Verhältnis $\frac{D}{B}$ vorliegen. Im übrigen braucht f nicht sehr genau bekannt zu sein, da es mit $\frac{D}{B}$ multipliziert neben 1 auftritt und sein Einfluß dadurch einigermaßen herabgedrückt wird.

Um die drei Konstanten dieser Formel bestimmen zu können, sind also Präparate aus drei verschiedenen Richtungen nötig.

Eine erste Serie Präparate wurde aus einem großen plattenförmigen Kristall geschnitten, den mir Herr Geheimrat Voigt zur Verfügung stellte. Er lieferte je zwei Präparate aus drei verschiedenen Richtungen, die im Folgenden mit römischen Ziffern bezeichnet werden sollen. Die Präparate einer Richtung sind durch angehängte Buchstaben a, b, c unterschieden.

Die Präparate der Richtungen I und III sind weitaus die besten aller bei diesen Drillungen untersuchten. Die Präparate der Richtung II waren jedoch voller Spalten und Risse, die diese Präparate zum Teil ganz durchsetzen. Deshalb wurden von der Firma Steeg & Reuter aus ihrem eigenen Material (spanischen Ursprungs) eine neue Serie (mit arabischen Ziffern bezeichnet) hergestellt.

Im allgemeinen waren diese Präparate nicht so gut wie die alten ausgefallen, glücklicherweise befanden sich unter den Präparaten der Richtung II jedoch zwei brauchbare Exemplare.

Zur Kontrolle waren auch aus den Richtungen I und III neue Präparate mit hergestellt worden.

Es sind im Folgenden nur die Beobachtungen an den guten Präparaten wiedergegeben.

Um die sekundären Änderungen unbehindert zur Ausbildung kommen zu lassen, wurde eine Anordnung verwandt, bei welcher das eine Ende des Präparats fest und das andere Ende frei ist.

Der Bau des Apparates wurde dadurch ganz außerordentlich vereinfacht, daß Herr Geheimrat Voigt mir seinen Drillungsapparat [1]) freundlichst zur Verfügung stellte.

1) Pogg, Ann. Erg.-Band VII, 1875, S. 185.

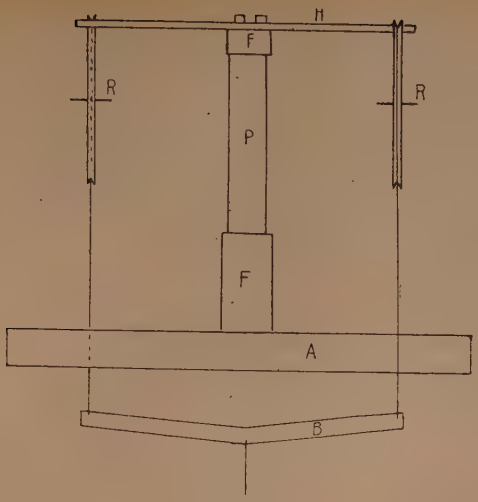


Fig. 10.

Die beiden Enden des Präparates P wurden in Fassungen F gekittet, von denen die eine so beschaffen war, daß sie an eine der Höhe nach verstellbare Stütze am Grundbrett A festgeschraubt werden konnte, die andere, welche das freie Ende bilden sollte, so, daß mittelst zweier kleiner Schräubchen an sie ein zweiarmiger Hebel ($H = 50{,}1$ mm) geschraubt werden konnte.

Von den Enden des Hebels führten dünne Drähtchen senkrecht zu seiner Längsrichtung über die in vorzüglichen Spitzenlagern ruhenden Rollen $R\,R$ vom Voigtschen Drillungsapparat, zu einem leichten Aluminiumbalken B, an dem belastet wurde. Die Rollen konnten für die Einstellung in Richtung ihrer Rotationsachse verschoben werden, was in der Figur nicht angedeutet ist.

Das Belasten geschah mit der von Herrn Geheimrat Voigt benutzten Anordnung, welche den besonderen Vorteil hat, daß eine beabsichtigte Belastung auf dem Wege steigender und fallender Belastung hervorgebracht werden kann. Der Mittelwert der in beiden Fällen erzeugten Drillungen ist für die vorliegenden Versuche hinreichend gut von der Reibung (insbesondere der der Rollen in den Achsenlagern) unabhängig.

Die Drillungen wurden durch zwei auf das Präparat geklemmte Spiegel gemessen.

Es zeigte sich leider, daß die Elastizitätsgrenze für die in Frage kommenden Fälle sehr niedrig liegt; ja die Präparate ließen sich wie Blei hin- und herbiegen. Deshalb konnten die Belastungen nur sehr gering gewählt werden, und dann mußte noch wegen der Spaltbarkeit die Dicke der Präparate einigermaßen beträchtlich

gewählt werden, sodaß die Ausschläge in einer 295 cm entfernten Skala nur 1—20 mm betrugen.

Da nun bei den kleinsten Belastungen die Erfüllung des linearen Gesetzes zwar am ehesten erwartet werden kann, die Beobachtungsgenauigkeit aber auch am kleinsten und die Einwirkung etwaiger Fehler am größten ist, wurde lieber auch bei etwas höheren Belastungen beobachtet und dann ausgeglichen nach:

$$n = \alpha x + \beta x^3 + \gamma.$$

X. Dimensionen.

							F	A	N	$\frac{A}{b}$
Ia	D =	4,93	4,92	4,91	4,91	4,90 . 4,91	116	0,50	0,26	3,8
	B =	12,86	12,83	12,85	12,88	12,86 . 12,86				
Ib	D =	2,99	3,00	3,01	3,02	. 3,01	298	0,27	0,11	9,5
	B =	12,91	12,83	12,86	12,85	. 12,86				
II	D =	3,01	3,01	3,00	2,99	. 3,00	294	0,27	0,08	13
	B =	12,88	12,87	12,90	12,85	. 12,87				
IIIa	D =	4,93	4,93	4,92	4,91	. 4,92	115	0,52	0,20	5,2
	B =	12,80	12,76	12,77	12,71	. 12,77				
IIIb	D =	3,01	3,01	3,00	2,99	. 3,00	293	0,28	0,08	12,0
	B =	12,79	12,77	12,75	12,80	. 12,78				
1a	D =	3,12	3,13	3,13	3,13	. 3,13	149	0,64	0,35	2,8
	B =	6,84	6,87	6,87	6,87	. 6,87				
1b	D =	3,13	3,13	3,13	3,13	. 3,13	228	0,42	0,21	4,8
	B =	9,35	9,36	9,35	9,37	. 9,36				
2b	D =	3,02	3,02	3,01	3,00	. 3,01	182	0,45	0,17	6,0
	B =	8,56	8,52	8,52	8,52	. 8,53				
2a	D =	2,87	2,86	2,86	2,86	. 2,86	788	0,86	0,35	3,0
	B =	5,13	5,13	5,13	5,20	. 5,15				
3	D =	2,81	2,82	2,82	2,83	. 2,82	245	0,26	0,07	14
	B =	12,73	12,74	12,76	12,72	. 12,73				

	R	s_{55}	f
Ia	116	121	— 0,56
Ib	119		
1a		137	
1b		170	
2a	126	131	— 0,62
2b	128		
II		159	
IIIa	113	110	— 0,68
IIIb	112		
3		123	

XI. Drillungen.

I a $L = 55{,}4$ mm

P =	108,3	58,3	48,3	38,3	28,3
n beob. =	6,2	3,0	2,5	1,9	1,4
n ber. =	6,29	2,97	2,42	1,87	1,35

$\alpha = 0{,}0500$

$\beta = 0{,}000\,000\,75$ $\quad \gamma = -0{,}1$

I b $L = 53{,}7$ mm

P =	28,3	23,3	18,3	13,3	8,3
n beob. =	5,6	4,6	3,6	2,6	1,5
n ber. =	5,64	4,55	3,52	2,52	1,54

$\alpha = 0{,}191$

$\beta = 0{,}000\,011\,7$ $\quad \gamma = -0{,}05$

II $L = 40{,}8$ mm

P =	41,7	31,7	21,7	11,7	6,7	4,7
n beob. =	11,5	7,5	4,8	2,3	1,1	0,8
n ber. =	11,6	7,6	4,6	2,2	1,2	0,8

$\alpha = 0{,}193$

$\beta = 0{,}000\,050\,3$ $\quad \gamma = -0{,}1$

III a $L = 36{,}2$ mm

L =	108,3	58,3	48,3	38,3
n beob. =	6,5	2,3	1,7	1,3
n ber. =	6,49	2,27	1,74	1,28

$\alpha = 0{,}0318$

$\beta = 0{,}000\,002\,5$ $\quad \gamma = -0{,}1$

III b $L = 41{,}9$ mm

P =	38,3	28,3	23,3	18,3	13,3	8,3
n beob. =	7,5	4,7	3,7	2,9	1,8	1,0
n ber. =	7,53	4,81	3,70	2,73	1,67	1,09

$\alpha = 0{,}142$

$\beta = 0{,}000\,039$ $\quad \gamma = -0{,}1$

1 a $L = 40{,}8$ mm

P =	21,7	11,7	6,7	4,7	2,7
n beob. =	9,2	3,9	2,1	1,4	0,8
n ber. =	9,19	4,02	2,14	1,44	0,79

$\alpha = 0{,}321$

$\beta = 0{,}00\,023$ $\quad \gamma = -0{,}1$

1 b $L = 52{,}4$ mm

P =	21,7	11,7	6,7	4,7
n beob. =	7,9	3,8	2,2	1,5
n ber. =	7,82	3,97	2,22	1,52

$\alpha = 0{,}339$

$\beta = 0{,}000\,056$ $\quad \gamma = -0{,}1$

2 a $L = 47{,}8$ mm

P =	6,7	5,7	4,7	3,7	2,7
n beob. =	7,7	5,0	3,9	3,2	1,9
n ber. =	7,42	5,58	4,07	2,84	1,85

$\alpha = 0{,}682$

$\beta = 0{,}010$ $\quad \gamma = -0{,}2$

2 b $L = 47{,}7$ mm

P =	21,7	11,7	6,7	4,7	2,7
n beob. =	21,3	5,4	2,45	1,55	0,8
n ber. =	21,4	5,72	2,31	1,44	0,72

$\alpha = 0{,}299$

$\beta = 0{,}0015$ $\quad \gamma = -0{,}16$

3 $L = 36{,}2$ mm

P =	16,7	11,7	8,7	5,7
n beob. =	4,35	2,4	1,6	0,9
n ber. =	4,39	2,40	1,55	0,87

$\alpha = 0{,}164$

$\beta = 0{,}000\,38$ $\quad \gamma = -0{,}15$

Hierin bedeutet α den gewöhnlichen Elastizitätsmodul. Das Glied βx^3 gibt die einfachste Korrektion für die Abweichung vom linearen Gesetz, da das Gesetz offenbar ungerade sein muß. γ hat die Bedeutung der Nullreibung. Sie wurde nicht durch die Rechnung ermittelt, da sie sich durch diese sehr ungenau bestimmt. Da eine direkte Messung mit dem Apparate auch nicht möglich war, so wurde aus der Beobachtung des Reibungsanteils bei von Null verschiedener Belastung auf Null graphisch extrapoliert. γ ist ziemlich klein.

In der Tabelle der Beobachtungen findet sich eine Zusammenstellung der in der oben angegebenen Weise von der Reibung befreiten Drillung „n beob.“ und den Resultaten „n ber.“ der Ausgleichsrechnung. P bedeutet die Belastung in gr mit Wagschale.

Für die Berechnung der Moduln aus den einzelnen Werten wurde folgendermaßen verfahren:

In der allgemeinen Gleichung sei gesetzt $f = -0{,}630 - \delta$ und seien folgende Abkürzungen eingeführt:

$$R = \frac{n D^3 B}{3 N L}\left(1 - 0{,}630\,\frac{D}{B}\right)$$

$$A = \frac{D/B}{1 - 0{,}630\,D/B}$$

$$N = \left(\frac{D}{B}\right)^2 \frac{s_{16}^2}{s_{11}} - \left(\frac{D}{B}\right)^3 \frac{s_{16}^2}{s_{11}} \cdot 0{,}630$$

$$b = \left(\frac{D}{B}\right)^3 \frac{s_{16}^2}{s_{11}}$$

dann lautet dieselbe

$$R = \frac{s_{55} + N - b \cdot \delta}{1 - A\delta}.$$

Man darf erwarten, daß $A\delta$ klein gegen 1 ist, deshalb kann man schreiben:

$$R = (s_{55} + N - b\delta)(1 + A\delta)$$

oder bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in δ

$$R = s_{55} + N + \delta\,[A(s_{55} + N) - b].$$

Es ist mit der Versuchsgenauigkeit durchaus vereinbar $N < 0{,}35$ (wie aus der Dimensionstabelle X ersichtlich) gegen $s_{55} \sim 100$ zu vernachlässigen, also zu schreiben:

$$R = s_{55} + \delta\,(A s_{55} - b).$$

Aus dem gleichen Grunde kann man auch noch b fortlassen, da nach der Tabelle

$$\frac{A s_{55}}{b} > 300.$$

Für die vorliegenden Präparate reduziert sich die allgemeine Gleichung also auf die Form:

$$R = s_{55} + A s_{55}\,\delta.$$

Das Schema der Normalgleichung für die Beobachtungen gleicher Richtungen hat also die Form:

$$R = \alpha \,.\, 1 + \beta b,$$

wo α und β die gesuchten Konstanten sind.

Nach diesem Verfahren wurden die Beobachtungen von Ia mit Ib, IIIa mit IIIb, 2b mit 2a zusammengefaßt, und die daraus resultierenden Werte von f bei Berechnung für die andern Präparate dieser Richtung benutzt (s. S. 40 unten).

Eine gewisse Bestätigung dafür, daß man diese Werte 2 mit I und III nun weiter kombinieren darf, mag man im Folgenden erblicken. 1b gibt im Verhältnis zu 1a einen Wert, der um ca. 19% zu groß ist, dies kommt ganz ohne Zweifel daher, daß 1b eine ganze Reihe tiefer und langer Spalten hat. Es wurde eben gerade deshalb untersucht, um die Wirkung dieser Spalten zu erkennen. 1a besitzt nur wenige Spalten, die das Abweichen seines Wertes gegenüber dem sehr guten I aber immerhin noch erklären mögen.

Ähnlich wie die Präparate 1a zu 1b in dieser Hinsicht der Spalten verhalten sich II zu 2, nur daß die Präparate 2 besser sind als 1a. Zieht man infolge dieser Analogie von II 19% ab, so erhält man 128, also ungefähr gerade den Wert, der für 2 direkt gefunden worden ist.

3 könnte mit III eigentlich besser stimmen.

Eine Rechnung der Konstanten der Formel aus I, III, 2 gab:

$$s_{55} = 110 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$$
$$s_{44} = 143. \quad „$$
$$s_{45} = -7{,}3. \quad „$$

Sehr überraschend ist im Hinblick auf die große Änderung von s'_{11} mit der Richtung, die sehr geringe Änderung von s'_{55}; s_{45} ist deshalb sehr ungenau.

Die Werte für s_{44} und s_{55} dürften auf 3—5% zuverlässig sein, der Wert für s_{45} vielleicht nur auf 30%.

Schluss.

Eine Übersicht über das System der gefundenen Modulwerte gibt folgendes Schema:

$s_{11} = 20{,}0 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}$	$s_{12} = -2{,}0$	$s_{44} = 143$
$s_{22} = 19{,}6$	$s_{23} = -5{,}4$	$s_{55} = 110$
$s_{33} = 64{,}7$	$s_{31} = -10{,}2$	$s_{66} = 49{,}3$

$$s_{16} = -\ 5{,}7$$
$$s_{26} = -13{,}1 \qquad s_{45} = -7{,}3$$
$$s_{36} = \ \ 8{,}8.$$

Aus diesen Werten bestimmt sich der Modul der kubischen Dilatation zu:

$$\sigma = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2\,(s_{12} + s_{23} + s_{31})$$
$$= 69{,}1 \,.\, 10^{-10}\,\frac{cm^2}{gr}.$$

Aus den Elastizitätsmoduln s_{hk} lassen sich die Elastizitätskonstanten c_{hk} berechnen.

Sie sind verknüpft durch die Beziehungen:

$$c_{1h}s_{1h} + c_{2h}s_{2h} + \cdots + c_{6h}s_{6h} = 1, \quad ^{1})$$
$$c_{1h}s_{1k} + c_{2h}s_{2k} + \cdots + c_{6h}s_{6k} = 0,$$

für h und $k = 1, 2-6$, sowie $h \neq k$.

Da für den vorliegenden Fall eine Reihe von Moduln verschwinden, zerfallen die Determinanten dieser Gleichungssysteme in zwei Faktoren:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{44} & s_{45} \\ s_{45} & s_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{31} & s_{61} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{36} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{66} \end{vmatrix}.$$

Dies hat zur Folge, daß die

$$c_{16},\ c_{26},\ c_{11},\ c_{22},\ c_{66},\ c_{36}$$

sich gerade nur durch die entsprechenden

$$s_{16},\ s_{26},\ s_{11},\ s_{22},\ s_{66},\ s_{36}$$

ausdrücken, und ist insofern von Bedeutung, als die ungenauesten Moduln s_{44}, s_{55}, s_{45} in die obigen Konstanten nicht eingehen.

Das System der Konstanten lautet:

$$c_{11} = 5{,}40 \,.\, 10^{8}\,\frac{gr}{cm^2} \qquad c_{12} = -1{,}35 \qquad (c_{44} = 0{,}70)$$
$$c_{22} = 6{,}02 \quad " \qquad c_{23} = -0{,}49 \qquad (c_{55} = 0{,}92)$$
$$c_{33} = 1{,}59 \quad " \qquad c_{31} = +0{,}84 \qquad c_{66} = 2{,}35$$
$$c_{16} = -0{,}82$$
$$c_{26} = \ \ 1{,}67 \qquad (c_{45} = 0{,}047)$$
$$c_{36} = \ \ 0{,}054.$$

1) l. c. pag. 735.

Es kann zunächst befremdlich erscheinen, die an immerhin verschiedenem Material gefundenen Werte zusammenzufassen. Mit Recht aber wird man annehmen dürfen, daß das Verhältnis der Größenordnungen der einzelnen Konstanten allgemeine Bedeutung hat, zumal die von Herrn Coromilas gemachten vergleichenden Messungen am Gips am Montmartre und am Gips von Aschersleben, die — was Aussehen und Sprödigkeit anbetrifft — ziemlich verschieden von einander sind, gezeigt haben, daß der elastische Unterschied in den von ihm untersuchten Fällen (siehe Abschnitt I) nur klein ist (1—2 %).

Auch die Drillungsmessungen im Abschnitt III lassen einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden Serien nicht erkennen.

Um eine Übersicht über das elastische Verhalten des Gipses zu geben, wurde der Verlauf einiger Moduln in einigen Ebenen berechnet und in nachfolgenden Figuren dargestellt.

Figur II (Tafel) zeigt den Verlauf von s'_{13}, s'_{11}, s'_{66}, dabei ist für s'_{13} und s'_{16}, die — ähnlich wie s'_{16} in Tafel I — je eine Funktion zweier Richtungen sind, angenommen, daß die eine Richtung in der Z-Achse festgehalten wird. Der Kreis ist hinzugefügt, um den Maßstab zu verdeutlichen. Seinem Radius entspricht der Wert

$$R = 36 \cdot 10^{-10} \frac{cm^2}{gr}.$$

Figur III (Tafel) zeigt den Verlauf von s'_{11} in Ebenen durch die Z-Achse, welche mit der X-Achse die beigeschriebenen Winkel bilden.

Herrn Geheimrat Prof. Dr. W. Voigt spreche ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aus für die Anregung zu dieser Arbeit und das fördernde Interesse an ihrem Fortgang. Auch Herrn Assistenten Dr. Foersterling bin ich für manchen freundlichen Rat zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf.

Ich Theodor, Johann, Heinrich Reimers, evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehörigkeit, wurde am 29. März 1890 als Sohn des Kaufmanns W. Reimers und seiner Ehefrau Dorothea geb. Burmester zu Altona geboren. Meine Schulbildung erhielt ich auf der Realschule zu Altona und danach auf der Oberrealschule zu Altona-Ottensen, die ich Ostern 1909 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich widmete mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften von Ostern bis Michaelis 1909 in Kiel, von Michaelis 1909 bis Ostern 1911 in München und von da ab in Göttingen.

Ich besuchte Vorlesungen und Seminare folgender Herren Professoren und Dozenten:

in Kiel:

Dieterici, Heffter, Landsberg, Martius, Rinne;

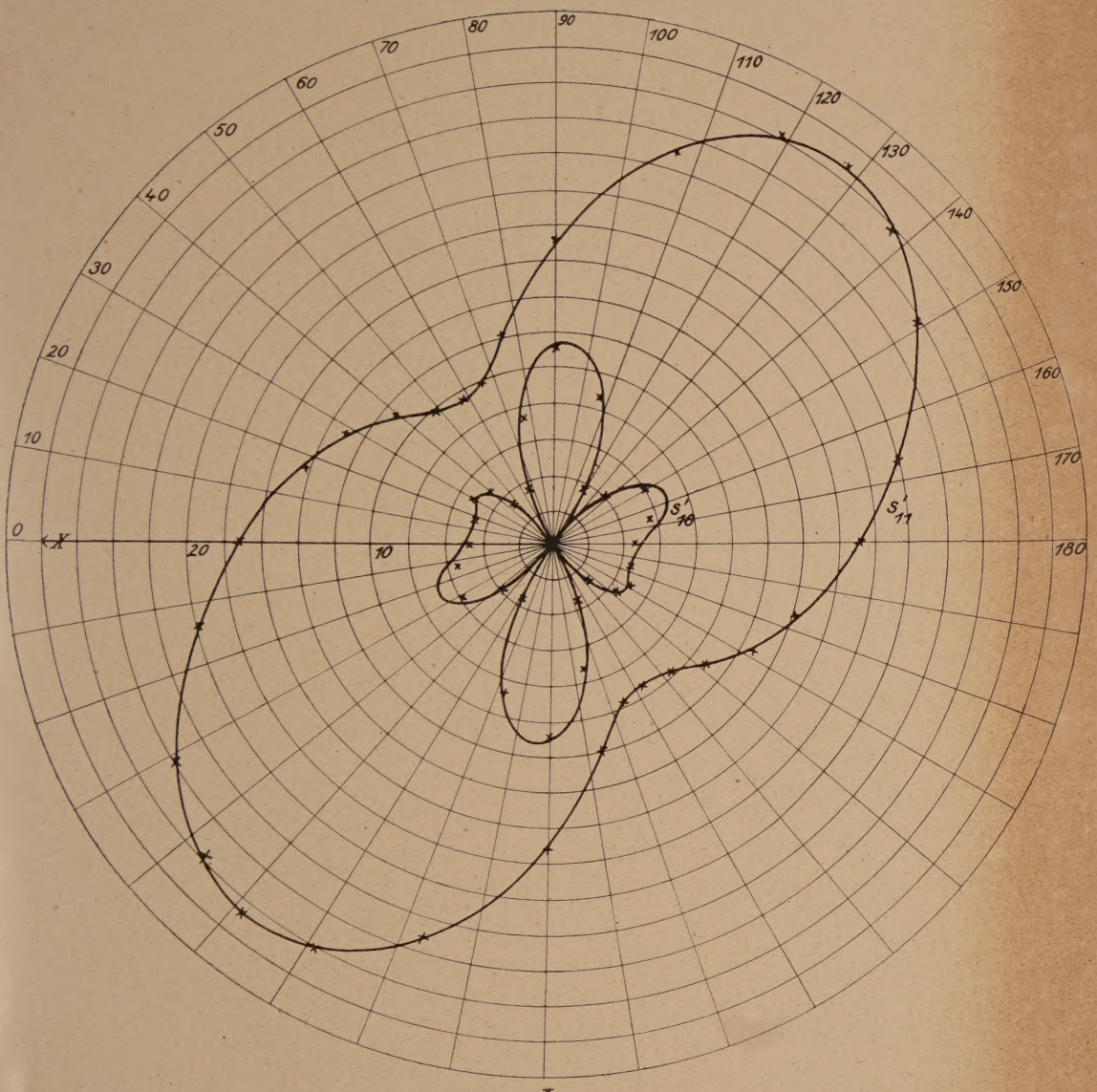
in München:

Ebert†, Graetz, Hartogs, Perron, Sommerfeld, Voß, Wagner;

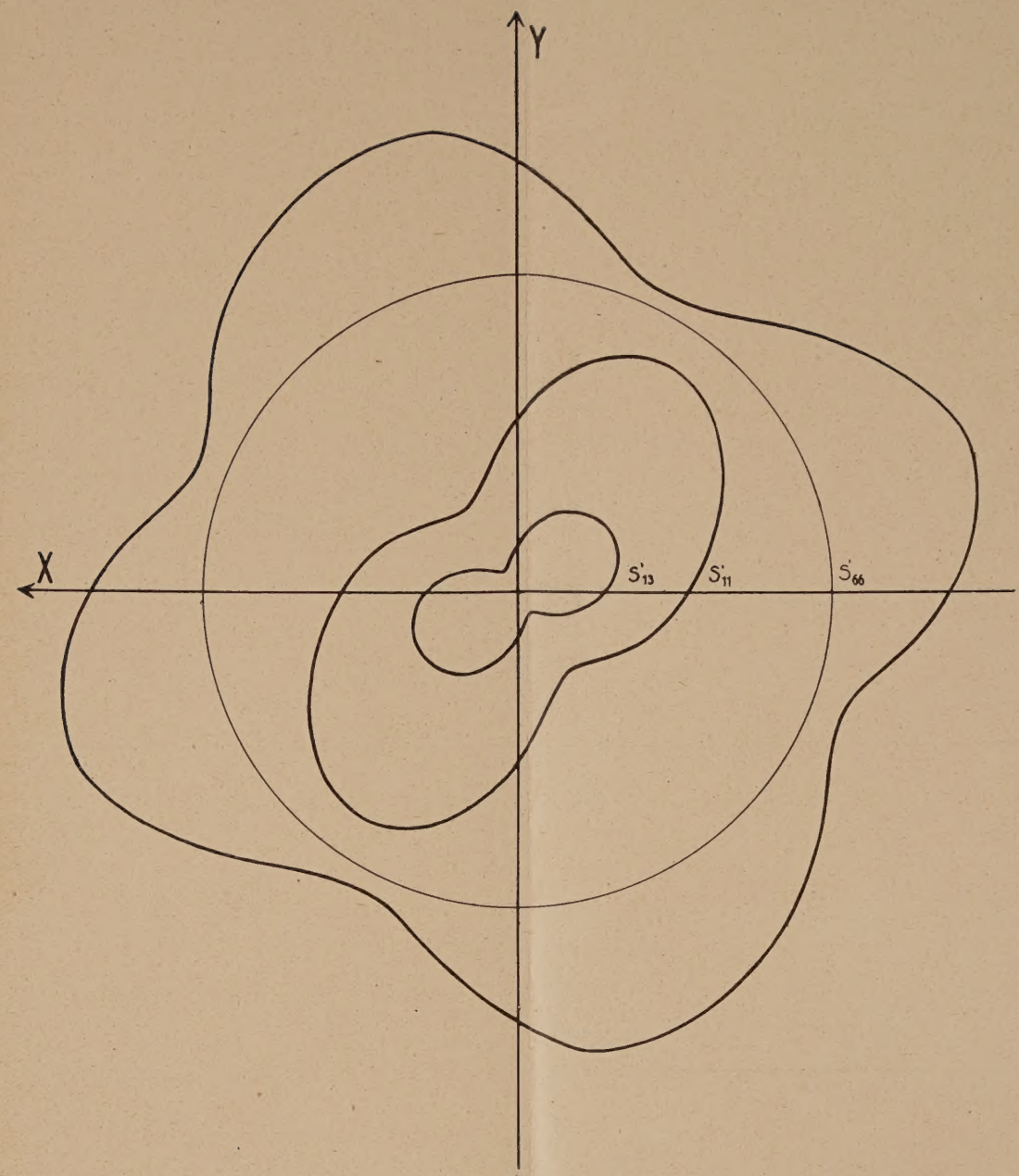
in Göttingen:

Haar, Hilbert, Husserl, v. Kármán, Landau, Mügge, G. E. Müller, Pompeckj, Prandtl, Runge, Riecke, Tammann, Toeplitz, Voigt, Wallach, Wiechert, Weyl, Zsigmondy.

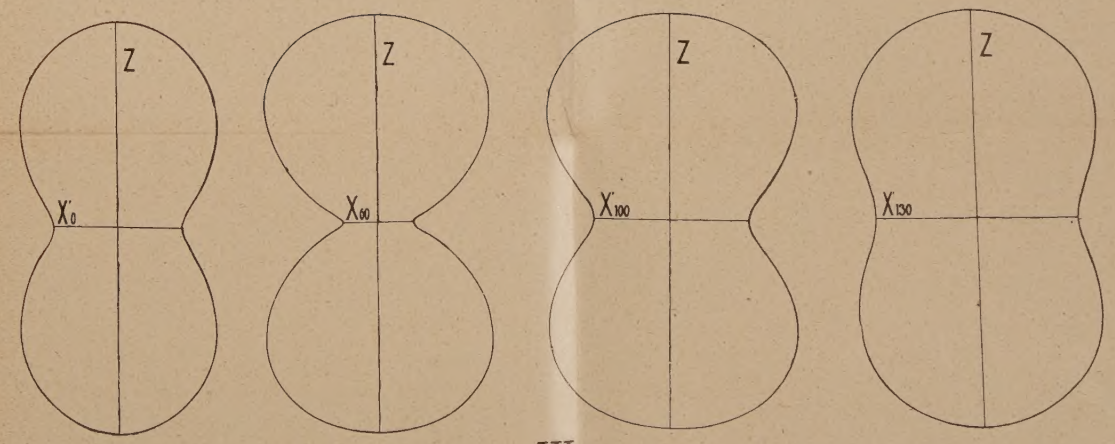
Ihnen allen gilt mein aufrichtiger Dank.


90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
100
110
120
130
140
150
160
170
180
X
20
10
S'_{16}
S'_{11}

I


Y
X
S'_{13}
S'_{11}
S'_{66}

II


Z
X'_0
Z
X_{60}
Z
X_{100}
Z
X_{150}

III